

Tanner-Sherratt モデルにおける最適施設配置問題 — 最適配置の分類 —

青 木 優

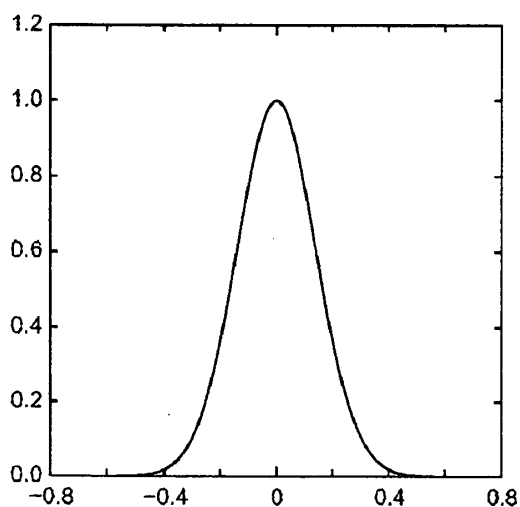
- I. はじめに
- II. Voronoi 図
- III. 最適施設配置問題の定式化
- IV. 最適配置とその分類
- V. まとめと今後の課題

I. はじめに

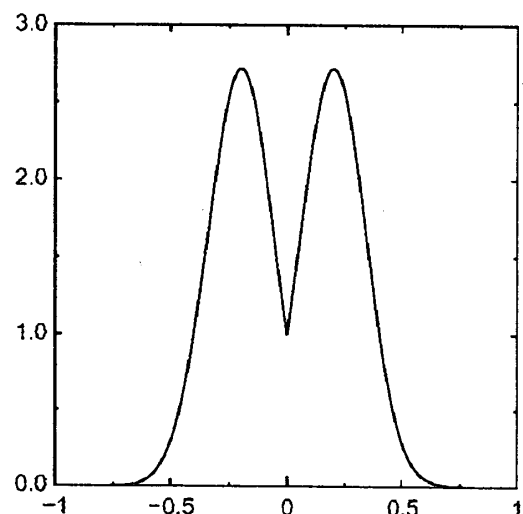
施設を配置する場合に利用者や配置する側の費用が最小になるようにするには、どこに施設を配置したらよいかという類の問題は最適施設配置問題[1,2]といわれる。本研究では、最も単純な最適施設配置問題として、施設の需要分布を図1に示すような解析的な関数で与えて利用者総費用のみを最小にする問題を扱う。従来、このような単純なモデルに対する最適施設配置問題の解は、最急降下法を用いて数値的に局所的最適解までしか求められていなかった[1,3]。

筆者は論文[4]において、需要分布を図1(a)

に示す Tanner-Sherratt モデル[1,3]とした場合の最適施設配置問題をシミュレーテッド・アニーリング法[5]で解き、施設数が1から30までの大域的最適解を求めた。さらに、最適配置とアルゴン原子クラスターの安定構造との類似性について解析をおこなった。アルゴンのクラスターでは、原子数が少ない場合は正20面体クラスターが最も安定な構造である。この構造をとる原子数(マジックナンバー)は、13, 55, 147, 309, 561, ……である。13個の原子の場合には、真中に一つの原子が入りその周りを等価な12個の原子が取り囲む殻構造になっている。55個の場合には、13個の



(a)Tanner-Sherratt モデル



(b)Newling モデル

図1：需要分布モデル (横軸：距離、縦軸：分布値)

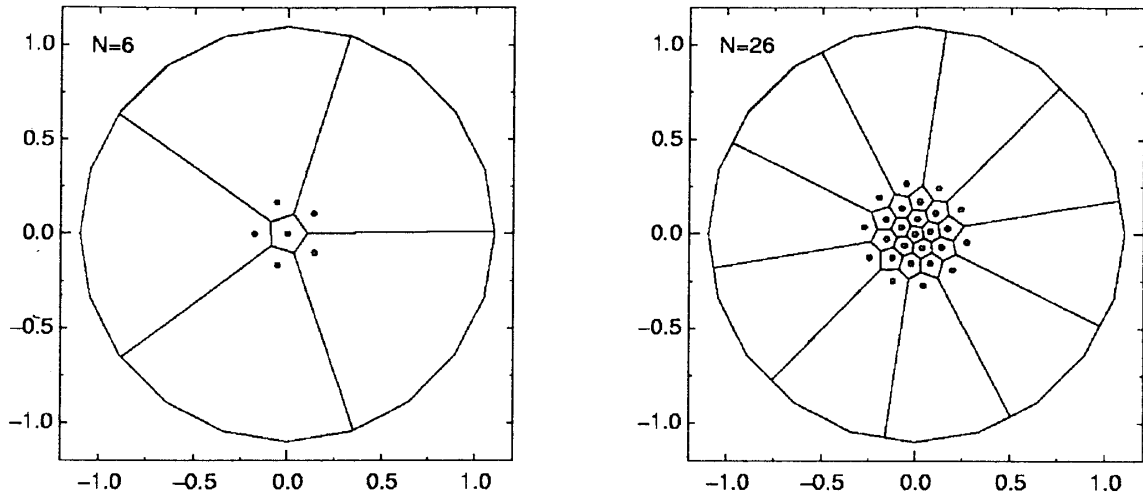


図2：Tanner-Sherratt モデルにおける施設の最適配置 (Nは施設数、点は施設、実線は利用圏の境界)

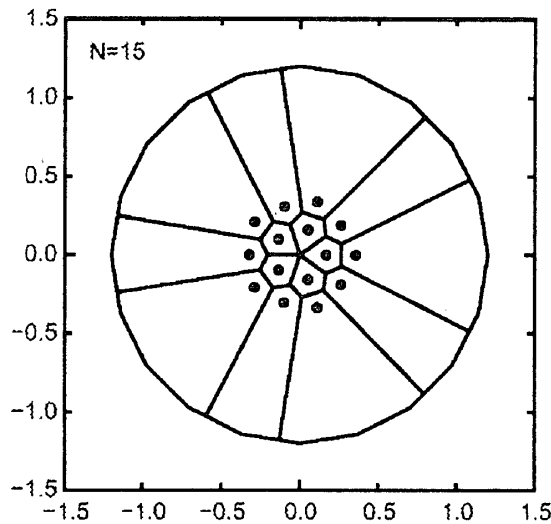


図3：Newling モデルにおける施設の最適配置 (Nは施設数、点は施設、実線は利用圏の境界)

クラスターの周りに更に一層増やした殻構造になっている。解析の結果、Tanner-Sherrattモデルにおける最適施設配置問題の場合、施設数が30以下のときには、6と26が効率よく配置できる施設数であることがわかった。図2にその最適配置と施設の利用圏 (Voronoi 図[6])を示す。アルゴン原子クラスターとこのモデルにおける施設の配置の間に類似性がみられることから、筆者はこの施設数を施設のマジックナンバーと名付けた。

論文[7]では、需要分布を図1(b)に示すNewlingモデルとした場合の最適施設配置問題を、論文[4]と同様にシミュレーティッド・アニーリング法で解き、大域的最適解を求めた。このモデルの場合、施設数が30以下

のときには、15が施設のマジックナンバーであることがわかった。図3にその最適配置とVoronoi 図を示す。

本研究では、需要分布をTanner-Sherrattモデルとした場合の最適施設配置問題を、これまでと同様にシミュレーティッド・アニーリング法で解き、施設数が64までの大域的最適解を求める。そして、最適配置の分類をおこなう。

II. Voronoi 図

Voronoi 図は、施設の利用圏を求める際によく用いられる図形である[1,2]。例えば、ある郵便ポストの利用圏を求めるためには、図4に示すように、利用圏を求めたい郵便ポストから周りの郵便ポストまで線分(点線)を

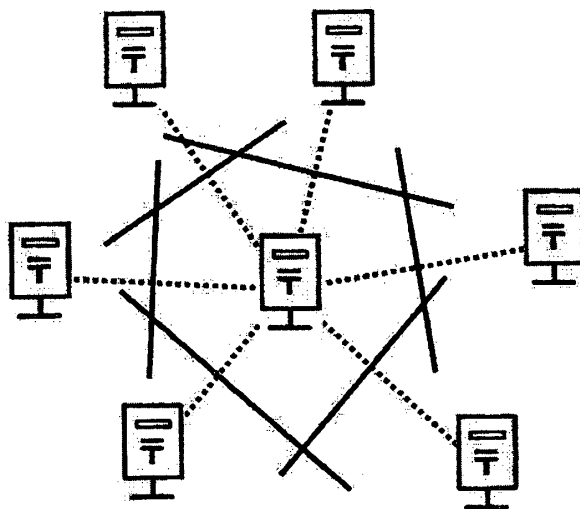


図4：郵便ポストの利用圏を求めるためのVoronoi図の作図方法

引き、同時にその線分の垂直二等分線(実線)を引く。この時、その垂直二等分線によって、基点となった郵便ポストを中心とした最小多角形ができる。これがその郵便ポストの利用圏(Voronoi図)である。そして、以上の操作を全ての郵便ポストについて行なうと全ての郵便ポストの利用圏を求めることができ、地図をVoronoi図で埋め尽くすことができるわけである。

この場合、郵便ポストまでの道程は、すべて直線であると仮定している。この仮定は、理論的にはDavidson[8]により、また、実際のデータによる検証は腰塚と小林[9]によってすでに研究されている。Davidsonによれば、密なランダムラインの道路ネットワーク上ではきわめて長い距離は直線で近似してよいことがわかっている。また、腰塚と小林は茨城県の国道、主要地方道と県道について道路距離 R と直線距離 D を調べ決定係数0.99で $R=1.14D$ の関係が成り立つことを示している。このように施設までの道路距離を地図上の直線距離で表す仮定は比較的良好な近似であり、それを用いたVoronoi図による結果も信頼できることになる。

Voronoi図の応用範囲は、結晶・アモルファス・準結晶のような原子配列に関する研究から細胞の配列、群生する生物の縄張り、

人間社会の施設の配置問題など非常に広範囲に及んでいる[10]。また、Voronoi図を作成するアルゴリズムに関する研究[1]も行なわれており、筆者も3次元凹領域におけるVoronoi多面体分割法とそれを用いた3次元数値積分法の開発を行なっている[11-14]。

III. 最適施設配置問題の定式化

利用者の費用を最小にする最適施設配置問題は、次のように定式化することができる[1,2]。

n 次元ユークリッド空間 R^n 内の N 個の施設を $P_1(\vec{x}_1)$ 、 $P_2(\vec{x}_2)$ 、……、 $P_N(\vec{x}_N)$ と表す。ただし、 \vec{x}_i は n 次元ベクトルである。

n 次元ユークリッド空間内の \vec{x} という位置にいる利用者が施設 $P_1(\vec{x}_1)$ を利用するための費用は、利用者と施設の距離 $|\vec{x}-\vec{x}_1|$ だけによるものとする。その費用 $f(|\vec{x}-\vec{x}_1|)$ は非負、狭義単調増加であるとし、利用者は必ず費用の最も小さい施設を利用するとすれば各施設の勢力圏は各施設 $P_1(\vec{x}_1)$ を母点とするVoronoi領域

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} \{ \vec{x} \mid |\vec{x}-\vec{x}_i| < |\vec{x}-\vec{x}_j| \} \quad (3-1)$$

となる。また、施設利用の需要分布を表わす n 次元ユークリッド空間の測度を $\mu(\vec{x})$ で表すと、利用者総費用 E は次のように表される。

$$E[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N] = \int (\min_i |\bar{x} - \bar{x}_i|) d\mu(\bar{x})$$

$$= \sum_{i=1}^N \psi_i f(|\bar{x} - \bar{x}_i|) d\mu(\bar{x}) \quad (3-2)$$

したがって、施設数 N 、需要分布の測度 $\mu(\bar{x})$ と費用 $f(|\bar{x}|)$ が与えられれば利用者総費用を最小化する問題は(3-2)の目的関数 E を最小にする施設の位置 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N$ を求める $n \times N$ 次元の非線形最適化問題として定式化される。

本研究では、 $d\mu(\bar{x})$ を Tanner-Sherratt モデル(正規分布モデル) $(2\pi)^{-1} \exp(-|\bar{x}|^2/2) d\bar{x}$ で表し、費用 $f(|\bar{x}|)$ は施設までの直線距離 $|\bar{x}|$ としている。また、需要分布領域は、半径が8の円を正20角形で近似した内部としているが、境界上で需要分布の値は 1.27×10^{-14} であるから、実際には無限遠と考えてよい。

IV. 最適配置とその分類

シミュレーティッド・アニーリング法を用いて、Tanner-Sherratt モデルにおける最適

配置を施設数 N が64まで求めた。図5から図9に施設数が6から64までの最適配置とその利用圏を示す。施設数の増加に伴って施設クラスターは円状になる傾向がある。また、施設の配置には殻構造が見られる。中心の施設クラスターを第0殻とすると、 N が6から13までは第1殻までをもつ施設クラスターである。同様に、 N が14から25までは第2殻まで、 N が26から41までは第3殻まで、 N が42から60までは第4殻までをもつ施設クラスター、 N が61からは第5殻をもつ施設クラスターとなる。ただし、 N が58の場合は例外であり、第5殻までをもっている。このように分類した場合、第1殻までをもっている施設クラスターは8個、第2殻までをもっている施設クラスターは12個、第3殻までをもっている施設クラスターは16個、第4殻までをもっている施設クラスターは18個となる。この結果、少なくとも第3殻までをもっている41個の施設クラスターまでは規則性のある殻構造があることがわかる。

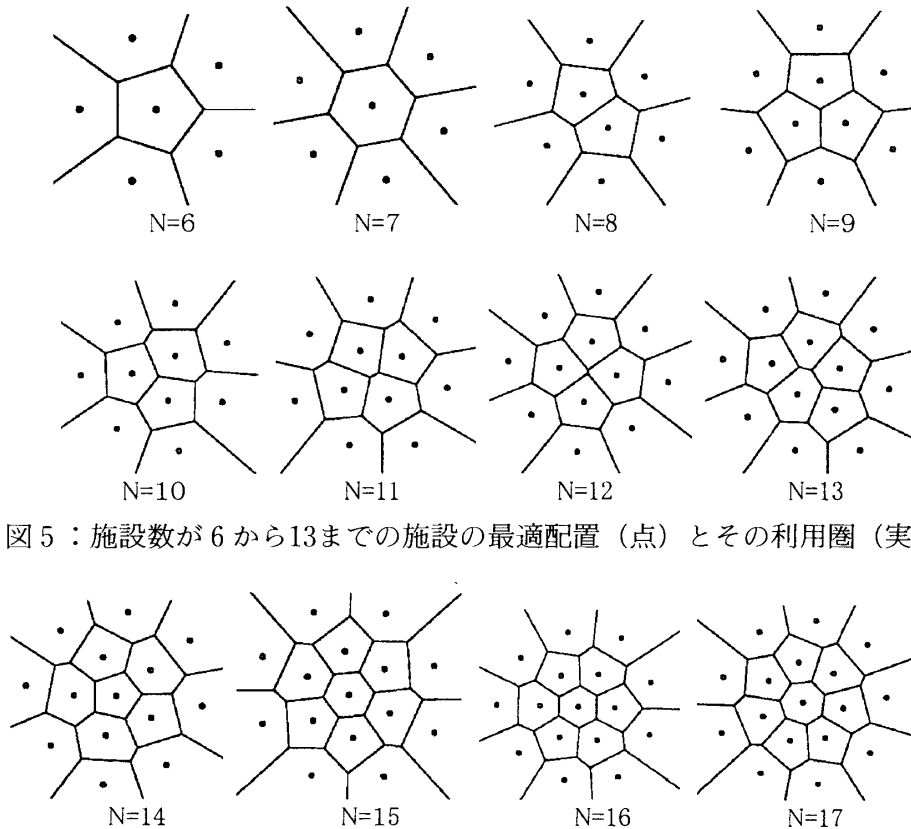


図5：施設数が6から13までの施設の最適配置(点)とその利用圏(実線)

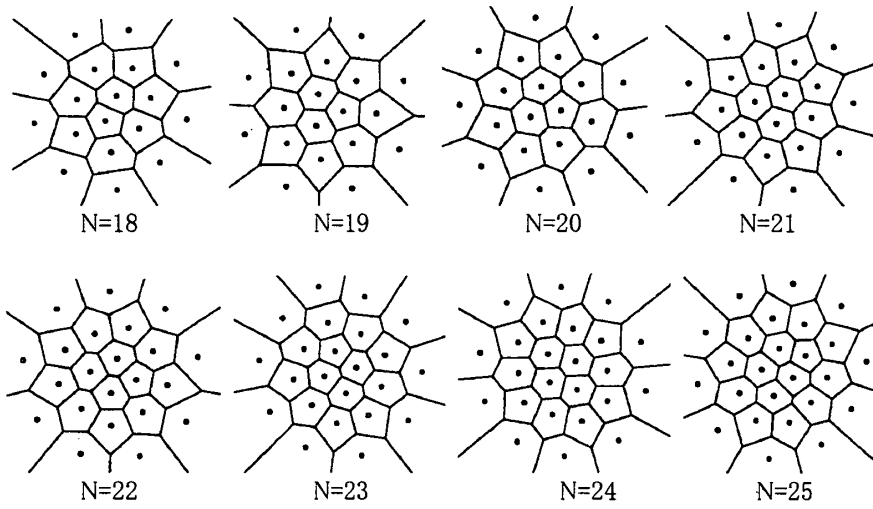


図 6 : 施設数が14から25までの施設の最適配置 (点) とその利用圏 (実線)

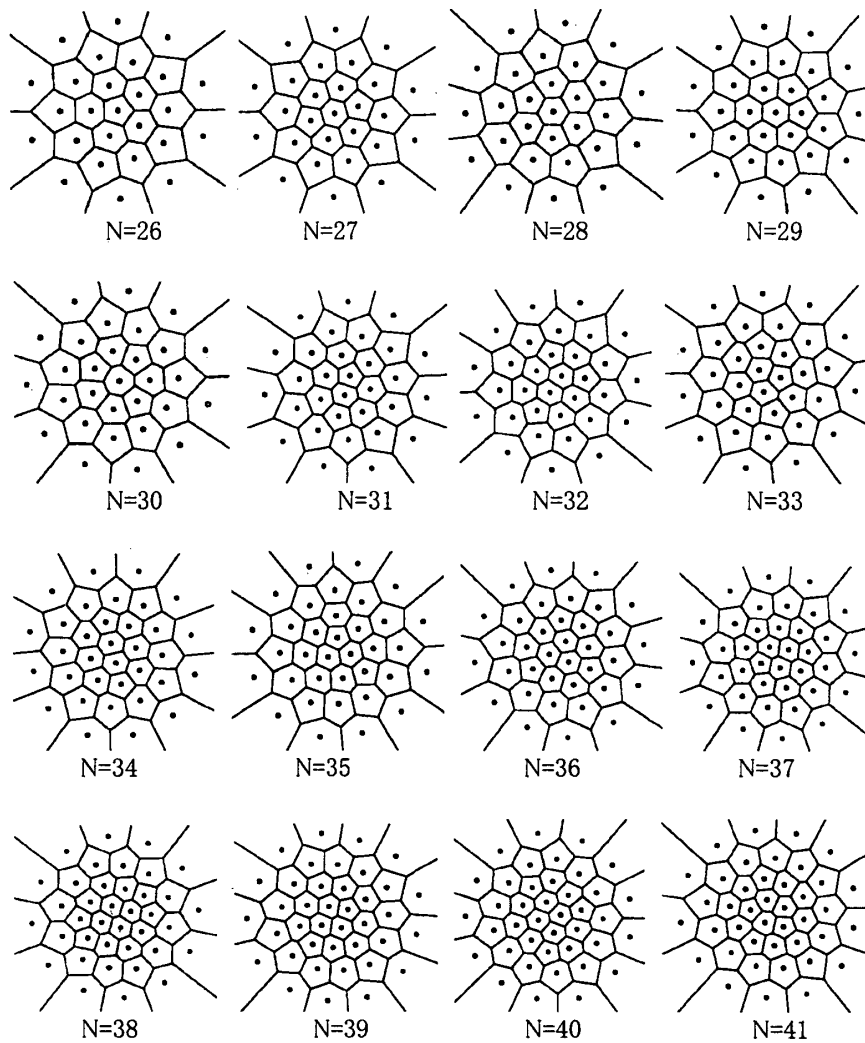


図 7 : 施設数が26から41までの施設の最適配置 (点) とその利用圏 (実線)

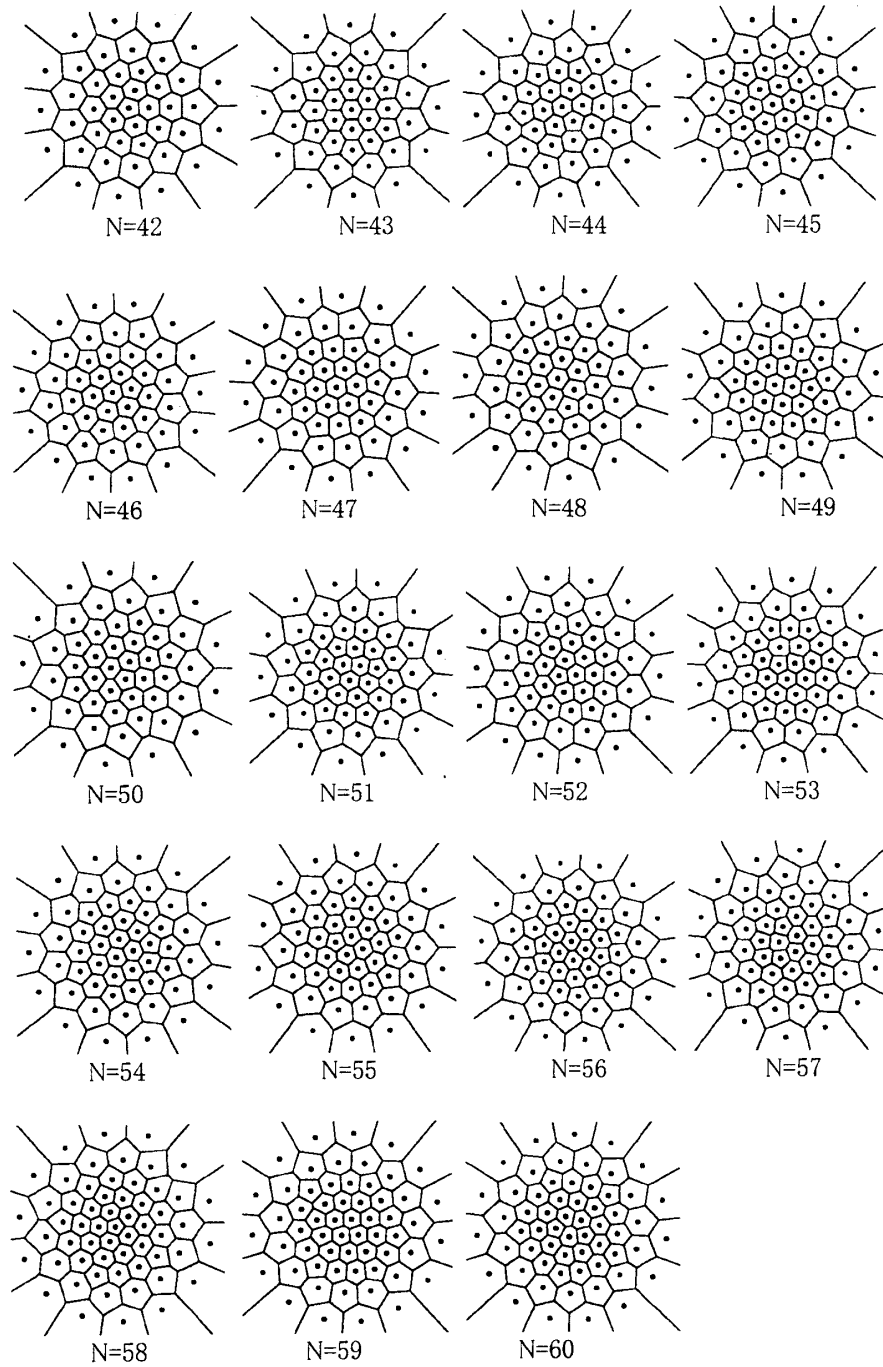


図8：施設数が42から60までの施設の最適配置（点）とその利用圏（実線）

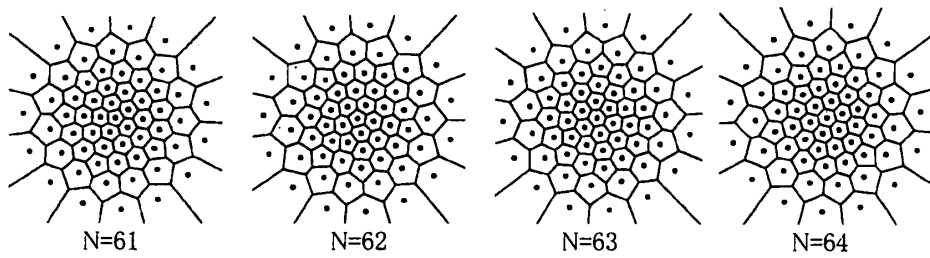


図9：施設数が61から64までの施設の最適配置（点）とその利用圏（実線）

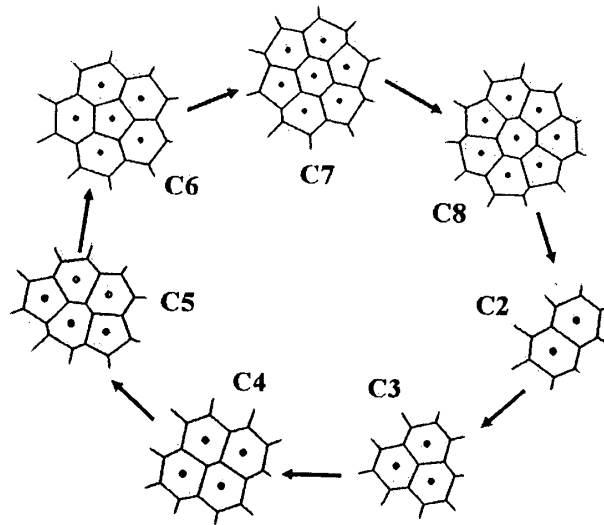


図10：施設数の増加に伴う中心付近の施設クラスターの変化（C 2：2個のクラスター、C 3：3個のクラスター、C 4：4個のクラスター、C 5：5個のクラスター、C 6：6個のクラスター、C 7：7個のクラスター、C 8：8個のクラスター）

次に、殻が一層増えるまでのプロセスについて、幾何学的に考察する。図5から図8までを見ると、それぞれの図中で、施設数の増加にしたがって、図10のように中心付近の施設クラスターが6個の五角形状クラスター（C 6）から出発し、7個の六角形状クラスター（C 7）、8個の七角形状クラスター（C 8）、2個のクラスター（C 2）、3個のクラスター（C 3）、4個のクラスター（C 4）、5個のクラスター（C 5）と変化しているのがわかる。そして、さらに施設数が増えると殻が一層増して、C 6へともどるようになっている。このことを考慮すると、57個の施設クラスターまでは、この規則にしたがっていることがわかる。

このように、Tanner-Sherratt モデルにお

ける施設の最適配置は、施設数が57以下であれば、その殻の数と中心付近の施設クラスターの形状によって規則正しく分類できる。

次に施設のマジックナンバーについて考察する。論文[4]において、施設数が6と26はマジックナンバーであることがわかったが、施設数6は第1殻までもっているグループの最初の施設クラスターであり、施設数26は第3殻までもっているグループの最初の施設クラスターである。このことから予測すると、次のマジックナンバーは第5殻までもっているグループの最初の施設数、つまり、61がマジックナンバーとなりそうである。図9を見てみると、施設数が61の場合には、正五角形の層状になっている。これがマジックナンバーであるかどうかの検討は、さらに精度の高い解

析が必要であるため、本稿では61がマジックナンバーであると結論づけることは避けておく。

V. まとめと今後の課題

論文[4]に引き続き、Tanner-Sherratt モデルにおける最適施設配置問題をシミュレーション・アニーリング法によって施設数が64まで求めた。施設の最適配置には殻構造が見られ、少なくとも施設数が57までは規則性のある殻構造があることがわかった。また、殻が一層増える幾何学的プロセスは、中心付近の施設クラスターが6個の五角形状クラスターから出発し、7個の六角形状クラスター、8個の七角形状クラスター、2個のクラスター、3個のクラスター、4個のクラスター、5個のクラスターと変化し、次の状態で殻が一層増えて6個の五角形状クラスターとなることがわかった。

今後の課題としては、以下のような内容が挙げられる。

- 1) 今回の研究において、施設数が58で規則性が乱れた原因の究明。
- 2) Tanner-Sherratt モデルにおいて、施設数61がマジックナンバーであるかどうかの検討。
- 3) 実際のデータを用いた施設の最適配置、及び現状の評価。
- 4) 施設利用者以外の費用を取り入れた場合の最適施設配置問題。

参考文献

- [1] 伊理正夫『計算幾何学と地理情報処理』共立出版 1997年
- [2] 岡部篤行、鈴木敦夫『最適配置の数理』朝倉書店 1992年
- [3] M. Iri, K. Murota, and T. Ohya, "A First Voronoi-Diagram Algorithm with Applications to Geographical Optimization Problems", in *Proceedings of the 11th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Copenhagen Lecture Notes in Control and Information Science 59, System*

Modelling and Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1983, pp. 273~288.

- [4] 青木 優「Tanner-Sherratt モデルにおける最適施設配置問題」『青山経済論集』第52巻第2号 2000年 5~21ページ
- [5] 上田 顕『コンピュータシミュレーション — マクロな系の中の原子運動 —』朝倉書店 1992年
- [6] G. Voronoi, "Nouvelles applications des parametres continus. la theorie des formes quadratiques" *J. Reine Angew. Math.* vol. 134, 1908, pp 198~287.
- [7] 青木 優「Newling モデルにおける最適施設配置問題」『環境と経営』第7巻第2号 2001年 31~41ページ
- [8] R. Davidson, "Line-Processes, Road and Fibers" *Stochastic Geometry*, E.F. Harding and D.G. Kendall, eds., Jhon Wiley, London, 1974, pp 148~251.
- [9] 腰塚武志、小林純一「道路距離と直線距離」『日本都市計画学会学術研究発表会論文集』1983年 43~48ページ
- [10] 高木隆司『形の数理』朝倉書店 1992年
- [11] K. Tsumuraya and M. I. Aoki, "A Voronoi partition in three dimensional concave domains", *Voronoi conference on analytic number theory and space tilings, 1998*
- [12] 青木 優、円谷和雄「複雑な3次元領域をボロノイ多面体に分割する方法とその応用例」、『第27回数値解析シンポジウム予稿集』1998年 127~130ページ
- [13] 青木 優、円谷和雄「凹多面体領域のVoronoi多面体分割法とその応用」、『第43回形の科学シンポジウム予稿集』1998年 119~120ページ
- [14] 青木 優、円谷和雄「3次元凹多面体領域におけるボロノイ多面体分割法とその応用—ボロノイ多面体を用いた3次元数値積分法の改良—」『第28回数値解析シンポジウム予稿集』1999年 36~39ページ