

Newlingモデルにおける最適施設配置問題

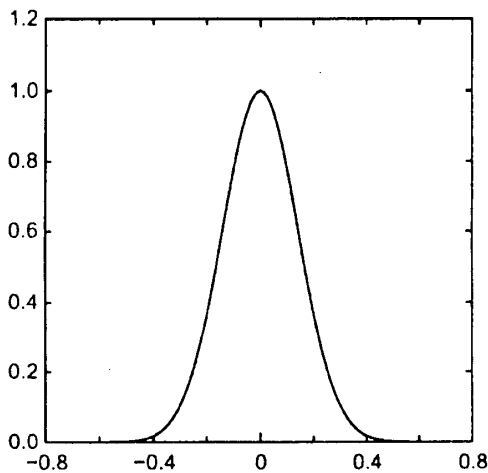
青 木 優

- I. はじめに
- II. Voronoi図と施設の利用圏
- III. 最適施設配置問題の定式化
- IV. シミュレーティッド・アニーリング法
- V. 利用者総費用の施設数依存性
- VI. 施設クラスターのマジックナンバー
- VII. まとめと今後の課題

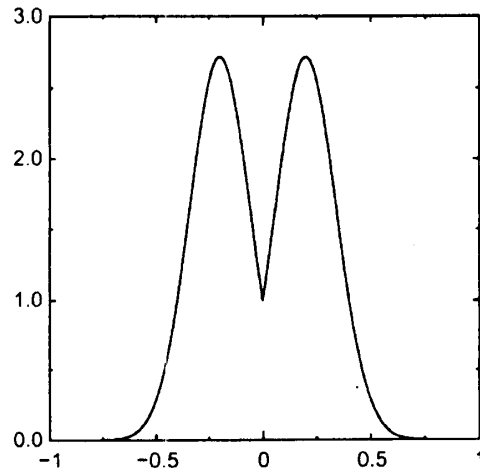
I. はじめに

施設を配置する場合に利用者や設置する側の費用が最小になるようにするには、どこに施設を配置したらよいかという類の問題は最適施設配置問題 [1, 2] といわれる。本研究では最も単純な最適施設配置問題として、施設の需要分布を解析関数で与えて利用者総費用のみを最小にする問題を扱う。従来、このような単純なモデルに対する最適施設配置問題の解は、最急降下法を用いて数値的に局所的最適解までしか求められていなかった [1, 3]。そこで筆者は、前回の論文 [4] おいて需要分布を図1(a)に示すTanner- Sher-

rattモデル（正規分布）とした場合の最適施設配置問題を数値的にシミュレーティッド・アニーリング法で解き、大域的最適解を求めた。その結果、施設数が30以下の場合には、6と26が効率よく配置できる施設数であることがわかった。そこで、筆者はこの施設数を施設のマジックナンバーと名づけた。今回の論文では、需要分布を図1(b)に示すNewlingモデルとした場合の最適施設配置問題を前回と同様にシミュレーティッド・アニーリング法で解き、大域的最適解を求め、施設のマジックナンバーを求める。



(a)Tanner-Sherratt モデル



(b)Newling モデル

図1: 需要分布モデル(横軸: 距離、縦軸: 分布値)

II. Voronoi図と施設の利用圏

最適施設配置問題を解く際には、まず施設の利用圏を求めてから施設の配置が妥当であるかどうか評価する必要がある。施設の利用圏を求める際に一般的に用いられる図形は、計算幾何学 (Computational Geometry) の分野でVoronoi図 [5] と呼ばれる図形である。Voronoi図を説明するために以下の郵便ポスト利用圏の問題を例にとることとする。

[郵便ポスト利用圏の問題]

自宅から郵便物を郵便ポストに投函しに行くとする。郵便ポストは自宅の近くに複数あり、自宅からの直線距離が一番近い郵便ポストに投函すると仮定すれば、どの郵便ポストに投函することになるだろうか。

この問題を解くには次のようにすればよい。まず、自宅付近の地図を用意する。次に自宅付近にある20個程度の郵便ポストの位置にしるしをつける。次に図2のように自宅に一番近いと思われる郵便ポストを一つ決め、そこから周りのしるしをつけた郵便ポストまで線分を引き、同時にその線分の垂直二等分線を引く。このときにその垂直二等分線によって基点となった郵便ポストを中心とした最小多角形ができる。これがその郵便ポストの利用圏 (Voronoi図) である。この中に自宅が位置していれば、この郵便ポストに投函するこ

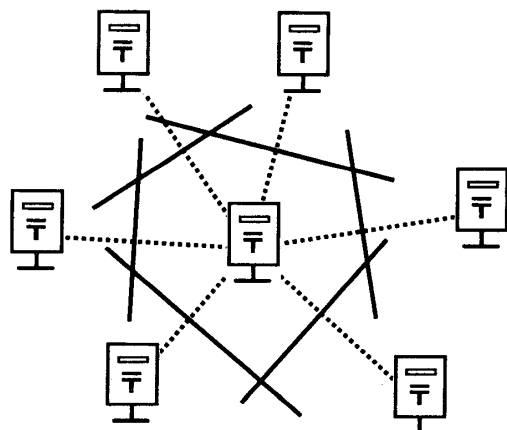


図2 : 郵便ポストの利用圏とVoronoi図

とになるし、そうでなければ別の郵便ポストについても同様に利用圏を求めて調べればよいわけである。そして、以上の操作を全ての郵便ポストについて行なうと全ての郵便ポストの利用圏を求めることができ、地図をVoronoi図で埋め尽くすことができるわけである。

郵便ポストの利用圏を求める際に仮定したようなある地点からある地点までの距離を直線で扱ってもよいかどうかという問題は、理論的にはDavidson [6] により、また、実際のデータによる検証は腰塚と小林 [7] によってすでに研究されている。Davidsonによれば、密なランダムラインの道路ネットワーク上ではきわめて長い距離は直線で近似してよいことがわかっている。また、腰塚と小林は茨城県の国道、主要地方道と県道について道路距離Rと直線距離Dを調べ決定係数0.99で $R=1.14D$ の関係が成り立つことを示している。このように施設までの道路距離を地図上の直線距離で表す仮定は比較的良い近似であり、それをを用いたVoronoi図による結果も信頼できることになる。

Voronoi図の応用範囲は、結晶・アモルファス・準結晶のような原子配列に関する研究から細胞の配列、群生する生物の縄張り、人間社会の施設の配置問題など非常に広範囲に及んでいる [8]。また、Voronoi図を作成するアルゴリズムに関する研究 [1] も行なわれており、筆者も3次元凹領域におけるVoronoi多面体分割法とそれをを用いた3次元数値積分法の開発を行なっている [9-12]。

III. 最適施設配置問題の定式化

利用者の費用を最小にする最適施設配置問題は、次のように定式化することができる [1, 2]。

n 次元ユークリッド空間 R^n 内の N 個の施設を $P_1(\vec{x}_1), P_2(\vec{x}_2), \dots, P_N(\vec{x}_N)$, と表す。ただし、 \vec{x}_i は n 次元ベクトルである。

n 次元ユークリッド空間内の \vec{x}_i という位置にいる利用者が施設 $P_i(\vec{x}_i)$ を利用するため

の費用は， 利用者 と 施設 の 距離 $|\vec{x}-\vec{x}_i|$ だけによるものとする。その費用 $f(|\vec{x}-\vec{x}_i|)$ は非負， 狭義単調増加であるとし， 利用者は必ず費用の最も小さい施設を利用するとすると各施設の勢力圏は各施設 $P_i(\vec{x}_i)$ を母点とするVoronoi領域

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} \{|\vec{x}-\vec{x}_i| < |\vec{x}-\vec{x}_j|\} \quad (3-1)$$

となる。また， 施設利用の需要分布を表わす n 次元ユークリッド空間の測度を $\mu(\vec{x})$ で表すと， 利用者総費用 E は次のように表される。

$$\begin{aligned} E[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N] &= \int f(\min_i |\vec{x}-\vec{x}_i|) d\mu(\vec{x}) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{V_i} f(|\vec{x}-\vec{x}_i|) d\mu(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3-2)$$

したがって， 施設数 N ， 需要分布の測度 $\mu(\vec{x})$ と費用 $f(|\vec{x}|)$ が与えられれば利用者総費用を最小化する問題は (3-2) の目的関数 E を最小にする施設の位置 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ を求める $n \times N$ 次元の非線形最適化問題として定式化される。

本稿では， $d\mu(\vec{x})$ を文献 [1, 3] と同様の図 1 (b) に示された Newling モデル $\exp(-25|\vec{x}|^2 + 10|\vec{x}|) d\vec{x}$ で表し， 費用

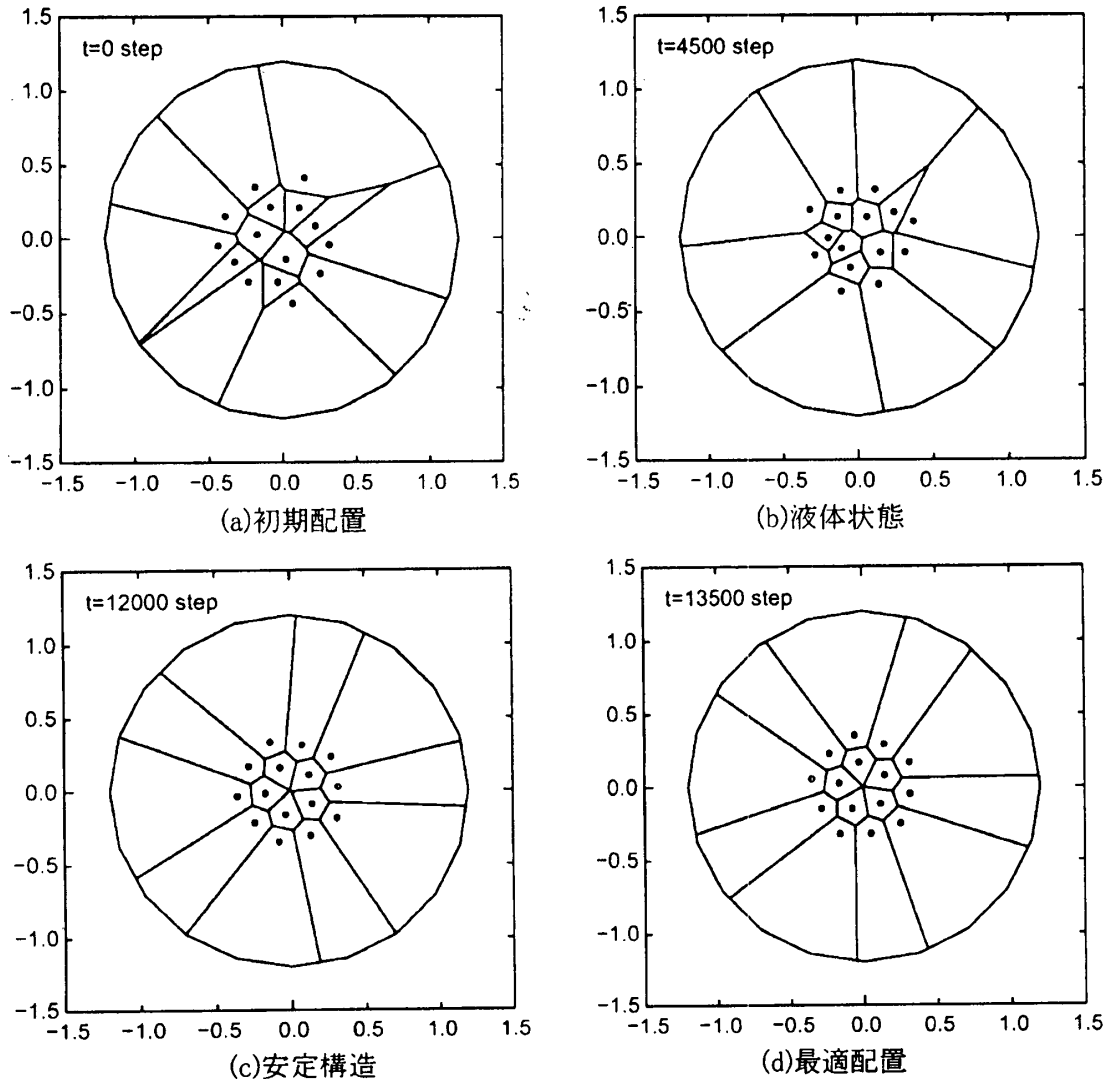


図 3 : $N=15$ の場合のシミュレーティッド・アニーリングによる施設配置の最適化の様子 (点は施設を表す。)

$f(|\vec{x}|)$ は施設までの直線距離 $|\vec{x}|$ としている。需要分布領域は半径が1.2の円を正20角形で近似した内部としているが、境界上で需要分布の値は 3.78×10^{-11} であるから実際には無限遠と考えてよい。

IV. シミュレーティッド・アニーリング法

シミュレーティッド・アニーリング法 [13] は、最適化問題において大域的最適解を求めるのに非常に優れた方法である。この方法では求めるべき解を仮想粒子の位置ベクトルとみなし、その粒子は目的関数Eで与えられるポテンシャルエネルギー曲面上を動きまわるとする。その際、粒子の運動はニュートン方程式に従うとし、粒子に働く力は目的関数をその位置ベクトルで微分して得られる。系の温度は粒子の運動エネルギーから求められる。最初に温度を高く設定して粒子のダイナミクスをシミュレートすると、粒子はポテンシャルエネルギー曲面上の局所的最小から局所的最小へと飛び移って動きまわることになる。ここで、系の温度をゆっくりと下げていくと粒子は最終的に大域的最小に落ち込み、そこから抜け出せなくなる。これは、いわゆる物質の結晶化である。

本稿のシミュレーティッド・アニーリングにおける最適化プロセスの例を施設数が15の場合について図3に示す。図3(a)は乱数によって決定された施設の初期配置、(b)は初期配置から高温のまま4500ステップ緩和した後の液体状態、(c)は7500ステップ冷却して安定構造になった状態、(d)は冷却後に十分緩和して最適配置となった状態である。このように、系をゆっくり冷やすことによって最適配置が決定されていくことわかる。

V. 利用者総費用の施設数依存性

前回の論文 [4] ではTanner-Sherrattモデルにおける最適施設配置問題がアルゴンなどの希ガス原子クラスターの構造決定問題と類似していることを報告した。今回のNewling

モデルの場合についても同様のことが言えるかどうか検討をおこなう。

図4に最適化後の施設の利用者総費用 $E[N]$ の施設数N依存性を示す。利用者総費用 $E[N]$ は、施設数Nの増加に伴ってTanner-Sherrattモデルの場合と同様の曲線を描いて減少している。また、施設数が1から30までの施設の最適配置を図5に示す。Tanner-Sherrattモデルの場合と比較して中心に施設が密集しなくなっているが、Tanner-Sherrattモデルの場合と同様にクラスターは円状になる傾向がある。

希ガス原子は、ファンデルワールス力という等方的で弱い原子間力で凝集する。この希ガス原子クラスターでは、できるだけクラスターの表面積を小さくすることによって表面原子数を最小にし、ポテンシャルエネルギーが低くなるように凝集する。そこで、各施設数について最も外側にある施設(最外設施設)の数 N_s の施設数Nに対する割合 N_s/N と $E[N]$ の相関を調べた結果を図6に示す。 N_s/N と $E[N]$ の間には強い正の相関があることがわかる。このことからNewlingモデルに対する施設の最適配置と希ガス原子クラスターの原子配置は同じような機構で決定されていることがわかる。

施設数が増加していくと最終的には、利用者数と施設数が一致して利用者の費用は零となる。また、クラスターは円形に近づいて

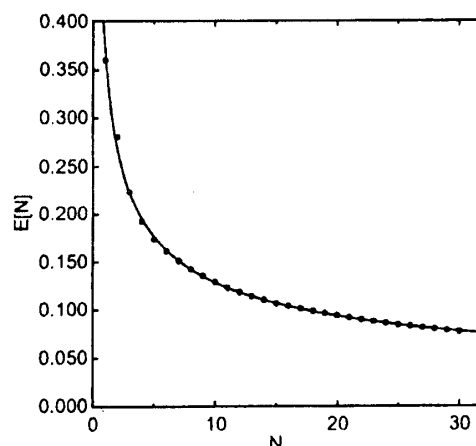
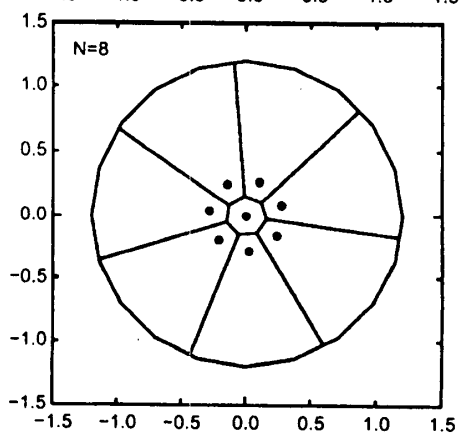
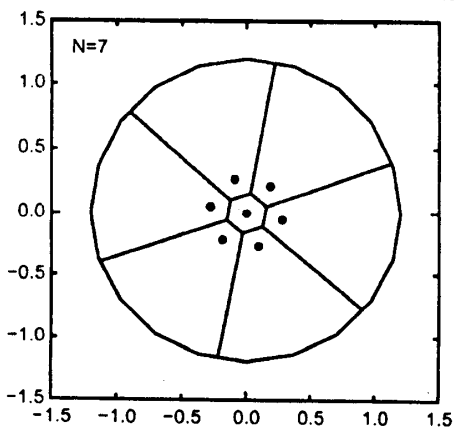
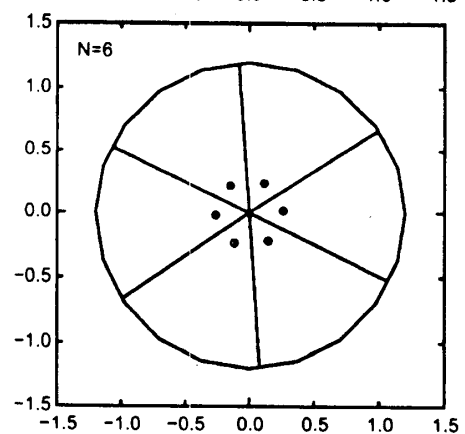
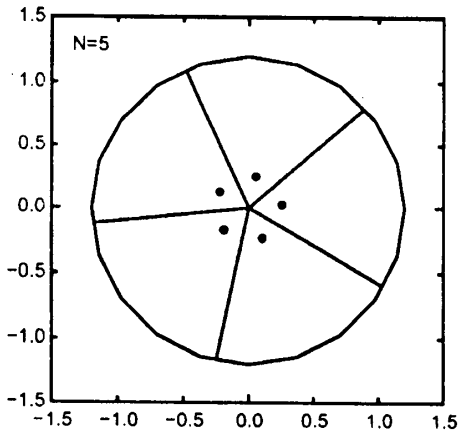
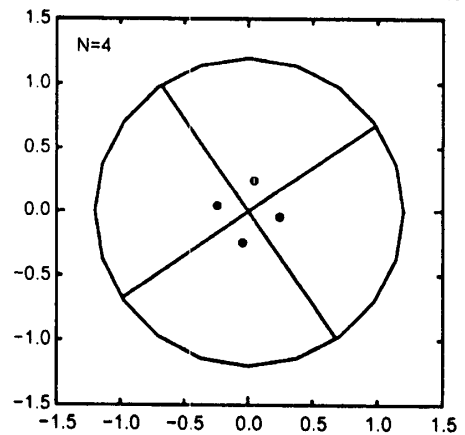
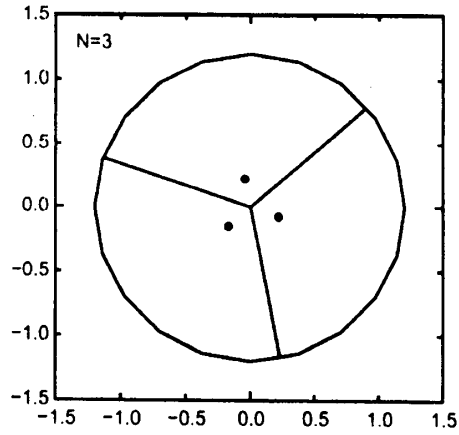
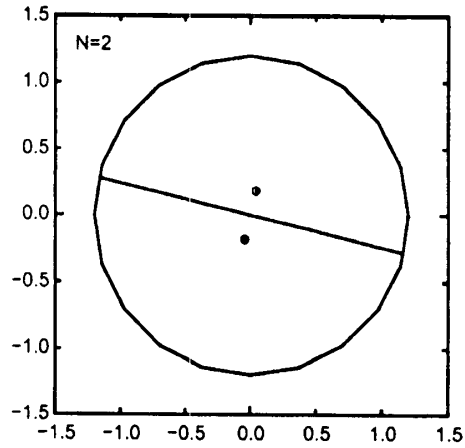
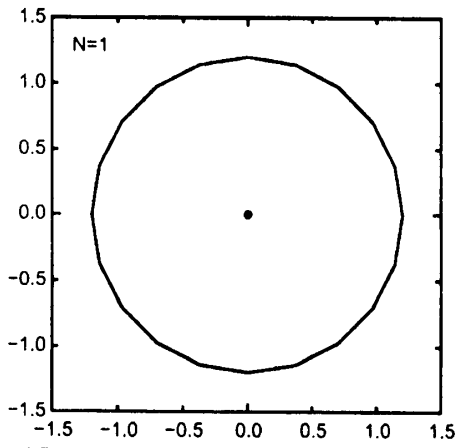
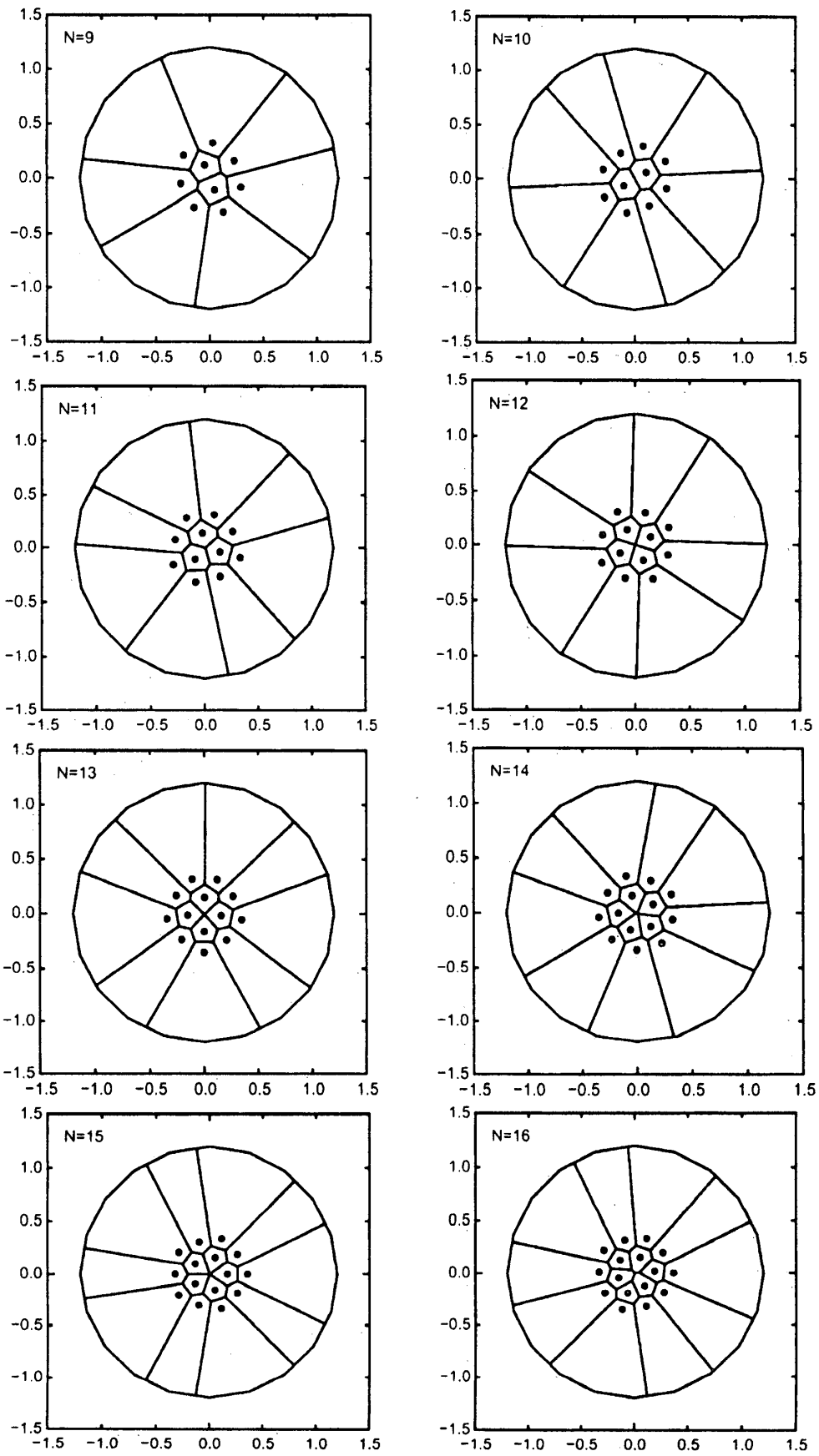


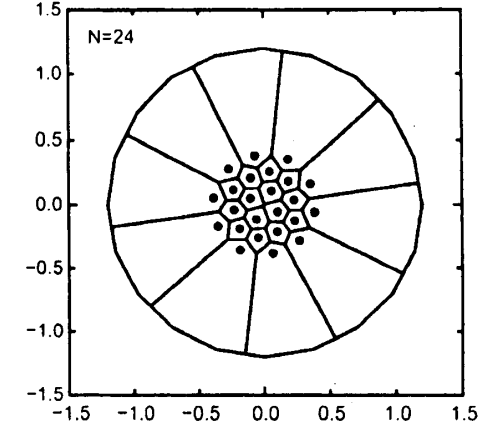
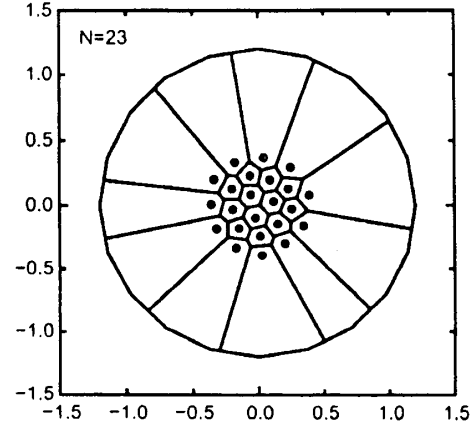
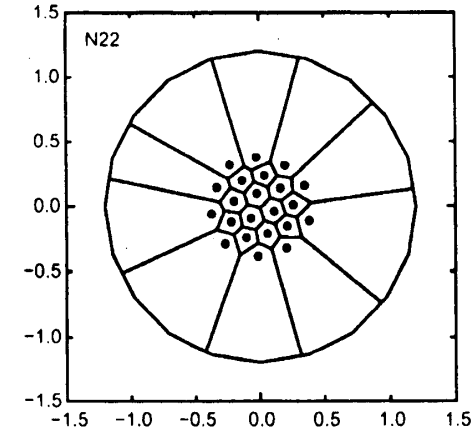
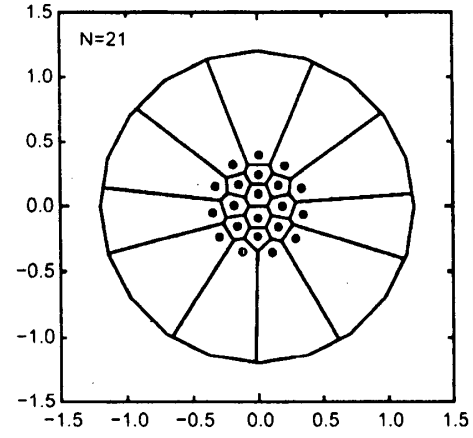
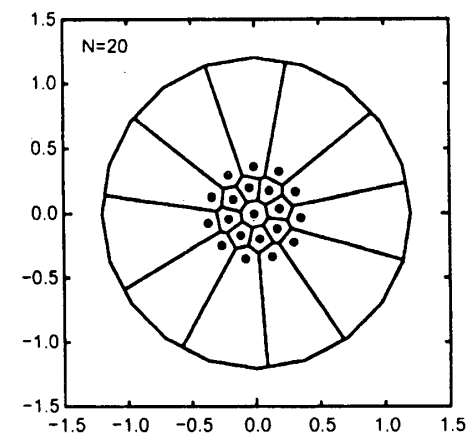
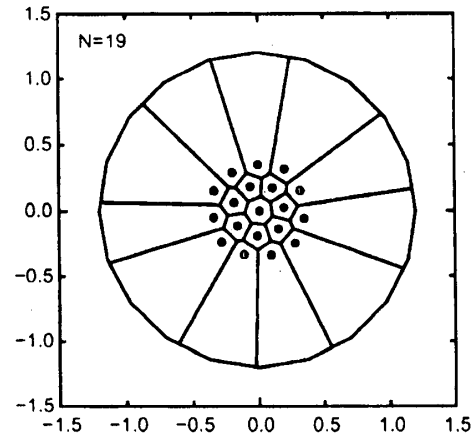
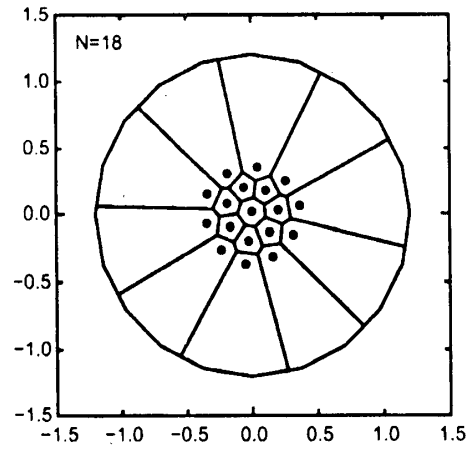
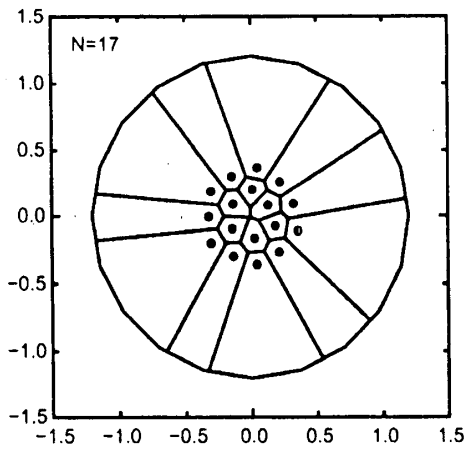
図4:利用者総費用 $E[N]$ の施設数 N 依存性

Newling モデルにおける最適施設配置問題





Newling モデルにおける最適施設配置問題



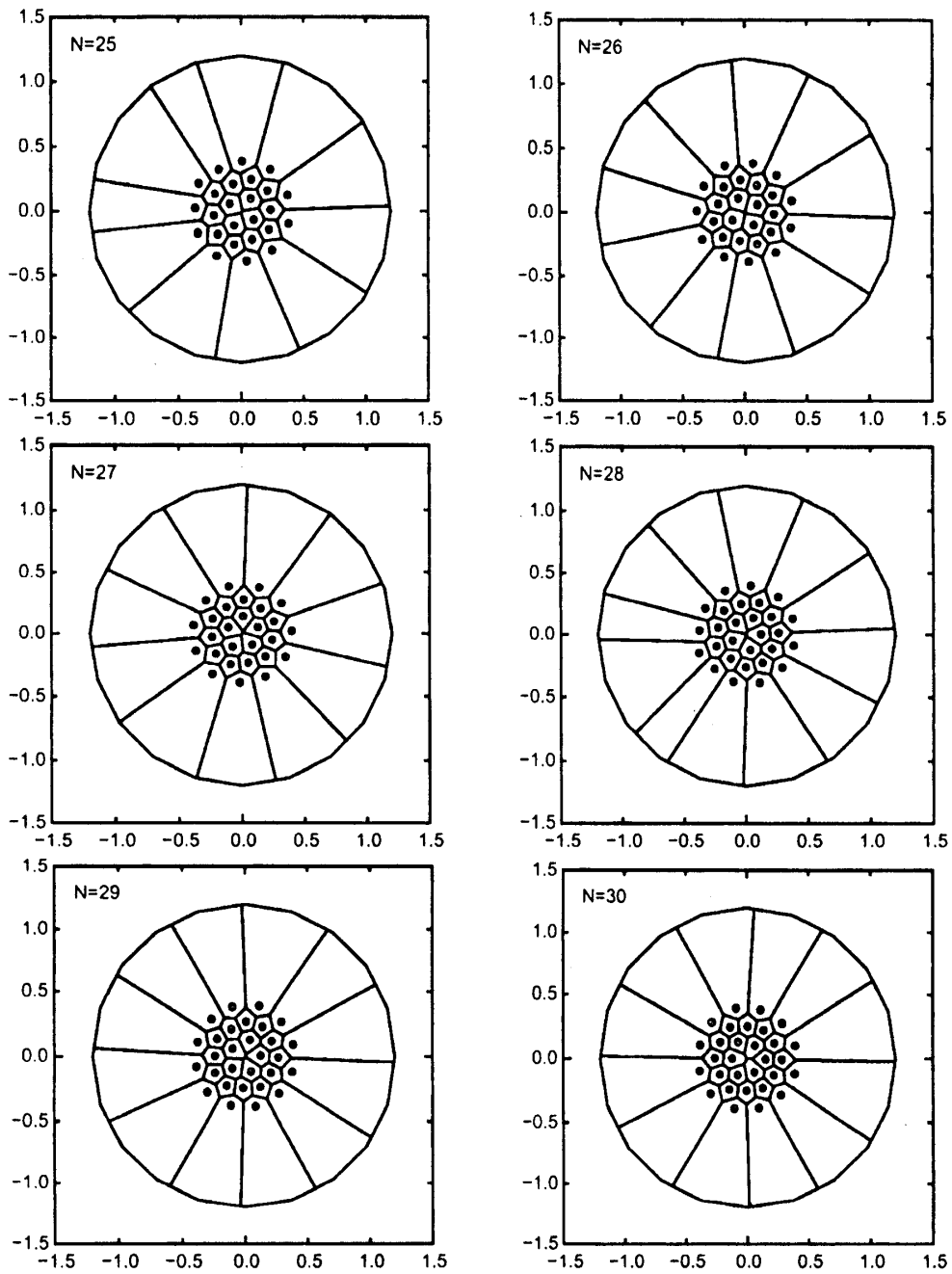


図5:施設数が1から30までの施設の最適配置

N_s/N は正のある値に近づく。その結果、図6の直線の切片は負になると予想されるがそのようにはなっていない。このことから、施設数の増加に従って利用者総費用 $E[N]$ が急激に減少することが予想される。

VI. 施設クラスターのマジックナンバー
アルゴンのクラスターでは原子数が少ない

場合は正20面体クラスターが最も安定な構造である。この構造をとる原子数（マジックナンバー）は、13, 55, 147, 309, 561, ……である。13個の原子の場合には、真中に一つの原子が入りその周りを等価な12個の原子が取り囲む構造になっている。55個の場合は、13個のクラスターの周りに更に一層増やした構造になっている。

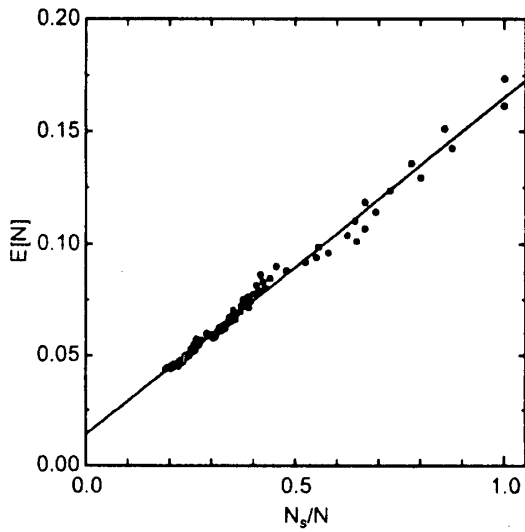


図 6: 最外殻施設数の割合 N_s/N と利用者総費用 $E[N]$ の関係

もしもアルゴンクラスターのようなマジックナンバーが施設クラスターに存在すれば、そのマジックナンバーは施設を効率よく配置できる施設数ということになる。Tanner-Sherrattモデルの場合には、施設数が30以下のマジックナンバーは図7に示すような6と26であった。また、その最適配置を見ると、6の場合には正五角形状に施設が配置されており、また、26の場合にも正五角形の層状に配置されていることがわかる。これは、アルゴンクラスターと類似している。Newlingモデルの場合にもマジックナンバーは存在するであろうか。

原子は単独で存在するよりも複数で凝集し

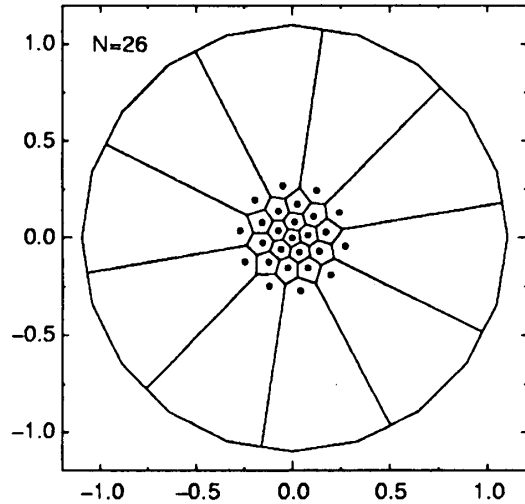
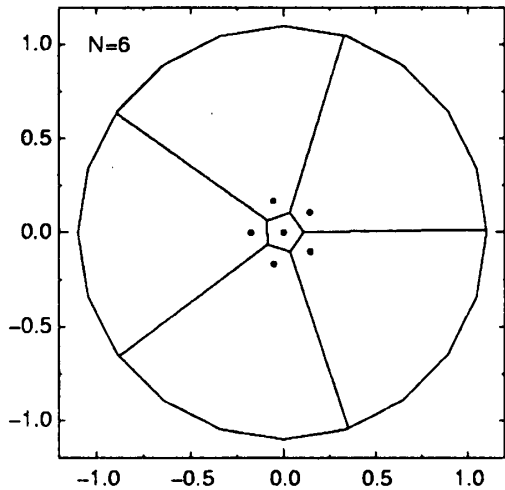


図 7: Tanner-Sherratt モデルにおける施設のマジックナンバー $N=6, 26$ の最適施設配置

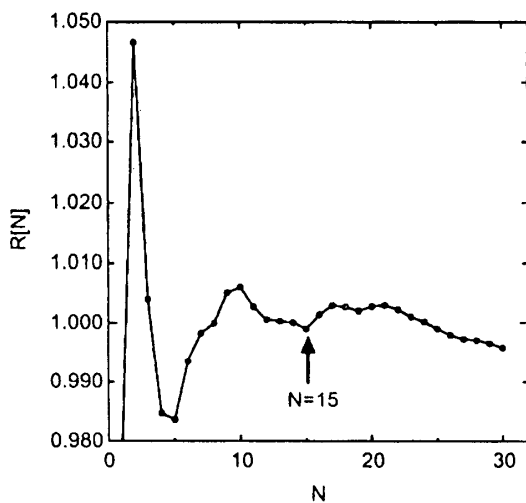


図 8: $R[N]$ の施設数 N 依存性

た方がエネルギー的に低くなり得をする。その得をした分のエネルギーを結合エネルギーという。原子クラスターでは、原子1個当たりの結合エネルギーが低いほど安定なクラスターとなり、マジックナンバーの場合が原子1個当たりの結合エネルギーが最も低くなる。施設のクラスターの場合について、アルゴンクラスターの原子1個あたりの結合エネルギーに相当するような量を計算するのは難しい。そこで、図4にプロットした利用者総費用 $E[N]$ の施設数 N 依存性について、それを最小二乗フィットした関数に対する比 $R[N]$ をプロットし、施設のマジックナンバーを調べることにする (図8)。

図8を見ると、施設数が非常に少ない場合を除いては $N=15$ の時に比較的大きな極小がみられる。また、図5の $N=15$ の場合の最適配置を見ると、Tanner-Sherrattモデルの場合と同様に正五角形の層状に配置されていることがわかる。このことから、Newlingモデルの施設数が30以下のマジックナンバーは15であることがわかる。

VII. まとめと今後の課題

従来、Newlingモデルにおける最適施設配置問題の解は最急降下法を用いて施設数が128の場合に対し局所的最適解までしか求められていなかったが、本稿においてはシミュレーティッド・アニーリング法を用いて大域的最適解を施設数が30以下の場合について求めることに成功した。施設の利用者総費用と施設数に対する最外殻施設数の割合の間には強い正の相関がみとめられ、ファンデルワールス力によって凝集する希ガス原子クラスターが表面原子数を出来るだけ少なくするように凝集するのと同じ機構で施設の最適配置が決定されていることがわかった。また、施設数が30以下の場合には、15が施設のマジックナンバーであることがわかった。

今後の課題としては、以下のような内容が挙げられる。

- 1) 実際のデータを用いた施設の最適配置、及び現状の評価。
- 2) 施設利用者以外の費用を取り入れた場合の最適施設配置問題。

参考文献

- [1] 伊理正夫 『計算幾何学と地理情報処理』 共立出版 1997年
- [2] 岡部篤行, 鈴木敦夫 『最適配置の数理』 朝倉書店 1992年
- [3] M. Iri, K. Murota, and T. Ohya, "A First Voronoi-Diagram Algorithm with Applications to Geographical Optimization Problems", in *Proceedings of the 11th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Copenhagen Lecture Notes in Control and Information Science 59, System Modelling and Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, pp.273 ~ 288.
- [4] 青木優 「Tanner-Sherrattモデルにおける最適施設配置問題」 『青山経済論集』 第52巻第2号 2000年 5~21ページ
- [5] G.Voronoi, "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques" *J. Reine Angew. Math. vol.134*, 1908, pp198 ~ 287.
- [6] R.Davidson, "Line-Processes, Road and Fibers" *Stochastic Geometry*, E. F. Harding and D. G. Kendall, eds., Jhon Wiley, London, 1974, pp248~251.
- [7] 腰塚武志, 小林純一 「道路距離と直線距離」 『日本都市計画学会学術研究発表会論文集』 1983年 43~48ページ
- [8] 高木隆司 『形の数理』 朝倉書店 1992年
- [9] K. Tsumuraya and M. I. Aoki, "A Voronoi partition in three dimensional concave domains", *Voronoi conference on analytic number theory and space tilings*, 1998
- [10] 青木優, 円谷和雄 「複雑な3次元領域をボロノイ多面体に分割する方法とその応用例」, 『第27回 数値解析シンポジウム予稿集』 1998年 127~130ページ
- [11] 青木優, 円谷和雄 「凹多面体領域のVoronoi多面体分割法とその応用」, 『第43回形の科学シンポジウム予稿集』 1998年 119~120ページ
- [12] 青木優, 円谷和雄 「3次元凹多面体領域におけるボロノイ多面体分割法とその応用—ボロノイ多面体を用いた3次元数値積分法の改良—」 『第28回数値解析シンポジウム予稿集』 1999年 36~39ページ
- [13] 上田顕 『コンピュータシミュレーション』

Newling モデルにおける最適施設配置問題

『一マクロな系の中の原子運動一』 朝
倉書店 1992年