量子力学とワイル代数

Quantum Mechanics and Wyle Algebra

小林　健一郎
Ken-ichiro KOBAYASHI

（平成21年10月７日受理）

要旨

量子力学の基本式である運動量と座標の交換関係は、代数学ではワイル代数の基本式として知られている。本小論では、量子力学の代数的側面を考察しする。

１．はじめに

20世紀初頭に完成した量子力学は原子レベルの物理を説明することに成功した。その後、量子力学は、原子核より小さい構造を探るため、相対性理論を取り込み、無限自由度の場の理論へと発展し、電磁力学等においてさらなる成功をみた。ただし、無限自由度を扱うことから、物理学者と「発散の問題」の格闘が延々と続けられることになった。

発散の解決策としては、無限大を「はじめから存在するもの」として取り込む「繰り込み理論」から、なんらかの形で発散をキャンセルさせる「超対称性理論」や「ひも理論」が研究されるようになった。このような方向が正しいかどうか、未だに、決着は見ていない。

そのため、理論の構造自体を考え直すことも有用であると思われる。本小論では、有限自由度の量子力学に戻って、その構造を代数学的立場から考え直してみたい。それにより、数学の手法を物理学に適用することができるかもしれないからである。

２．量子力学とワイル代数

量子力学は、不確定性原理によって特徴づけられる。そのもっとも端的なものとして、運動量 p と座標 x の交換関係、

$$[p,\ x] = -i\hbar \qquad (2-1)$$

が知られている[１][２]。ここで、$\hbar$ はプランク定数である。

（２－１）は、なんらかの解釈から「導く」こともできるが、一般には、量子力学の第１原理と考えられている。そして、（２－１）を満たすように $p = -i\partial$ と置き、粒子の波動関数等を導いていくことになる。（ここで、∂ は $\partial/\partial x$ を表す。）実際、∂ と x は、

$$[\partial, x] = 1 \qquad (2-2)$$

なる交換関係をみたす。

一方、代数学には、ワイル代数として知られている代数系がある[３][４]。x を不定元とし、∂を

$$\partial x = 1 + x\partial \qquad (2-3)$$

をみたすものとすると、ワイル代数 W(R) は、x の環 R 上の多項式環 R[x] に対し、R[x] と R[x]∂で生成される環のことである。もちろん、これは、(２－２)、すなわち、(２－１) を扱っていることになる。

ただし、一般のワイル代数では、x として複数のもの (x_1, x_2, x_3, …) を考えるが、ここでは、x のみの場合に限定する。もちろん、複数の場合に拡張することは難しくない。それは量子力学の場合も同様である。

R は、物理学では、実数体を考えるのが普通であるが、ここでは、体より条件のゆるい「標数０の環」とする。標数０の環とは、「０でない元を正整数倍して０になることはない環」という意味である (もちろん、体は標数０の環である)。すると、W(R) の元 p は、一意的に

$$p = \sum_{i=o}^{\infty} p_n(x)\, \partial^n \qquad (2-4)$$

と書くことができる。p 内に現れる∂を (２－３) を用いながら右に移動させていけば、このような形になる[付録(1)]が、その一意性は、R を標数０の環としなければ保証されない[付録(2)]。

なお、この W(R) は、左ネター単純環であることが示される。左ネター環とは、「任意の左イデアルが有限生成である環」という意味であり、単純環とは、「自明でない両側イデアルを持たない零でない環」という意味である。この証明には、有名なヒルベルトの基底定理が使われる。

３．波動関数とｂ関数

前節では、量子力学の「第１原理」である「運動量と座標の交換関係」から導かれる代数構造が、代数学ではワイル代数とよばれるものであることを示し、その代数的構造を紹介した。これから、物理学への応用を考えてみたい。

物理学では、粒子の状態を表す波動関数が重要な役割を果たすが、それは、シュレディンガー方程式の解となっている。シュレディンガー方程式は、「粒子の状態の時間推進」を表す式であるが、定常状態に対しては、エネルギー演算子であるハミルトニアンの固有方程式となる。ハミルトニアンとは、一般に、エネルギーを、(２－１) の交換関係を満

たす p、x で表したものである。（エネルギーは時間推進の演算子であり、定常状態とは、エネルギー一定の状態である。）

もちろん、考えている物理系によって、ハミルトニアンの形が違い、それぞれについてその固有方程式を解くことで、波動関数が得られるのである。たとえば、もっとも基本的なハミルトニアンは、微小な振り子などを表す「調和振動子」である。

$$H = p^2 / 2m + m\omega^2 / 2 \qquad (3-1)$$

ここで、m は粒子の質量、ωは振動の角速度である。

そして、定常状態に対するシュレディンガー方程式は、

$$H\Psi = E\Psi \qquad (3-2)$$

である。ここで、Ψ が波動方程式であり、E はその固有値（エネルギー）である。

ここでは、簡単のため、m、ω、$\hbar$ はすべて１とする（もちろん、簡単に、再現できる)。すると、エネルギーは、０以上の整数で番号付けられ、次のようになることが知られている。

$$E_n = n + 1/2 \qquad (3-3)$$

このときの波動方程式は、

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= C_0 \exp(-x^2/2) \\
\Psi_1 &= C_1 (2x) \exp(-x^2/2) \\
\Psi_2 &= C_2 (4x^2 - 2) \exp(-x^2/2) \qquad (3-4) \\
\Psi_3 &= C_3 (4x^3 - 12x) \exp(-x^2/2) \\
&\cdots \\
C_n &= (2^n\ n!)^{-1/2} (\pi)^{-1/4}
\end{aligned}$$

となる[２]。

ここで、多項式部分は、機械的に導くことができるが、エルミートの多項式になることも知られている。したがって、調和振動子の物理を表すもっとも基本的な存在は、基底状態の波動関数 Ψ_0ということになる。

このような「構造」は、代数学の言葉でも表すことができる。興味深いのは、上記のような波動関数が、ワイル代数の表現論にどのように表れるかであるだろう。

本小論で、研究の端緒として、波動関数とｂ関数（佐藤・ベルンステイン多項式）との関連を指摘したい[３][５]。

ｂ関数は、代数学の解析学への応用を１つの動機として考察されている。それは、次のようなものである。

まず、R[x] の 0 でない元 f と不定元 s に対し、記号 f^s を考え、∂ を含む W(R[s]) の元を、規則

$$\partial f^s = s(\partial f)f^{-1} f^s \qquad (3-5)$$

に従って作用させる。これは、R[s, x, f^{-1}] f^s を W(R[s]) 上の加群として考えるということである。なお、記号 $f^k f^s$ を、簡単のため、f^{s+k} と書く。

このとき、W(R[s]) のある元 p に対し、

$$b(s)\, f^s = p\, f^{s+1} \qquad (3-6)$$

となる多項式 b(s) のうち、次数が最小であるものを b 関数という。他の多項式は b 関数で割り切れる。

佐藤、ベルンステインによって、任意の f に対し、b 関数が存在することが知られているが、それは、「調べたい多項式 f 」をはじめに考えるということになるので、「ハミルトニアンから波動方程式を導く」という思考には馴染みにくい。しかし、次のように考えることで、両者につながりが見える。

まず、f として、x^2 を考える。もちろん、この段階で物理的意味はない。ただ、「任意の多項式」を考えるのに、もっとも単純な例（の 1 つ）であるからだ。このとき、b 関数は

$$b(s) = (s+1)(s+1/2) \qquad (3-7)$$

であり、そのときの p は

$$p = \partial^2/4 \qquad (3-8)$$

であることが知られている。もちろん、（3 − 7）、（3 − 8）を（3 − 6）に代入しても、固有方程式の形をしていない。しかし、s の値を無限に変え、足し合わせれば、固有方程式の形にすることができる。すなわち、

$$\Psi = C\sum_{i=o}^{\infty}(x^2)^s/s! \qquad (3-9)$$

とすれば（ここで、C は適当な規格化定数とする)、（3 − 6）は、

$$(\partial^2/4 - x^2)\,\Psi = 1/2\Psi \qquad (3-10)$$

となる。これは、スケールを適当に変えれば、（3 − 2）に、Ψ_0を代入した式になる。すなわち、シュレディンガー方程式である[付録(3)]。

4．考察

物理的考察は一切ないので、前節で示したことは、量子力学の数学的側面の研究にｂ関数が現れるのではないかという示唆にはなっているように思う。いずれにしても、同じ代数の表言論を扱っているからである。

特に、数学的にもっとも簡単な多項式（の１つ）である x^2 のｂ関数が、物理的にもっとも簡単なシュレディンガー方程式（の１つ）である調和振動子と関連していることがわかったことは興味深い。

たとえば、（３－６）に対し、形式的に

$$\Psi = C \sum_{i=o}^{\infty} f^{-s}/p(0) \cdots p(-s) \qquad (4-1)$$

とおけば、Ψは

$$b\Psi = \Psi \qquad (4-2)$$

をみたす。このような関係式が常に物理的な意味を持つわけではないが、どのような場合に対応する物理があるのか興味深いと考える。

謝辞
静岡産業大学情報学部の先生方に感謝致します。

文献

［１］ ランダウ＝リフシッツ『量子力学』東京図書
［２］ D. ter Haar 宮沢弘成訳『演習量子力学』丸善株式会社
［３］ 堀田良之『代数入門』裳華房
［４］ 弥永昌吉『代数学』岩波書店
［５］ A.Borel 他『Introduction to D－modules』Academic Press

付録

⑴ たとえば、$p=\partial x^2$ は、（２－３）を使いながら ∂ を右に移動させると、$p=2x+x^2\partial$ となる。

⑵ ｐをｘの多項式に作用させ、その結果を見る。まず、$p1 = (\Sigma\, p_n(x)\, \partial^n)\, 1 = p_0(x)$ だから、$p_0(x)$ はｐから一意的に決まる。また、$px = p_0(x)x + p_1(x)$ から、$p_1(x)$ の一意性が言える。高次の項も同様である（正確には、帰納法を使う）。ただし、$px^n = \cdots + p_n(x)\partial^n x^n = \cdots + n!\, p_n(x)$ であるため、n!が零因子であると、$p_n(x)$ の一意性を言えなくなる。「標数が０」の条件はここで使われる。

⑶ m、ω、ℏを１とすると、Ψ_0 に対する（３－２）は、

$$(-\partial^2/2 + x^2/2)\,\Psi_0 = 1/2\,\Psi_0$$

となる。ここで、$x \to i\sqrt{2}\,x$ とおくと、これは、（３－10）に一致する。