2次元時空における光速不変性について

The invariance of the light velocity

小林　健一郎
Ken-ichiro KOBAYASHI

（平成20年10月8日受理）

要旨

2次元時空における光速不変性の制限は、3次元以上の時空における光速不変性より「ゆるい制限」になる。本小論では、その事実を指摘し、2次元時空におけるローレンツ変換の拡張を示す。

1．3次元以上の時空における光速不変性

4次元時空における世界間隔は次のように定義される[1][2]。

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dx^2 \qquad (1\text{-}1)$$

ここで、cは光速を表す。すると、光速不変の原理は次のように表すことができる。

$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow ds'^2 = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

ここで、ダッシュ付きの変数はもとの座標系（Kとする）から見て等速直線運動（速度をVとする）をしている座標系（K'とする）での値を表す。

実は、この条件から、ds^2の不変性が導かれる。さらに、ds'^2の不変性から、ローレンツ変換の式が導かれる。はじめに、それを示す[1]。

まず、ds^2が0のとき、ds'^2も0であるが、それぞれが微少量であることから

$$ds^2 = a(V)ds'^2 \qquad (1\text{-}3)$$

と書くことができる。ここでVはKに対するK'の速度Vの絶対値であり、aは

$$a(V) = 1 \qquad (1\text{-}4)$$

となる関数である。

ここで、Kに対して速度V_1で等速直線運動している座標系K_1と速度V_2で等速直線運動している座標系K_2を考える。

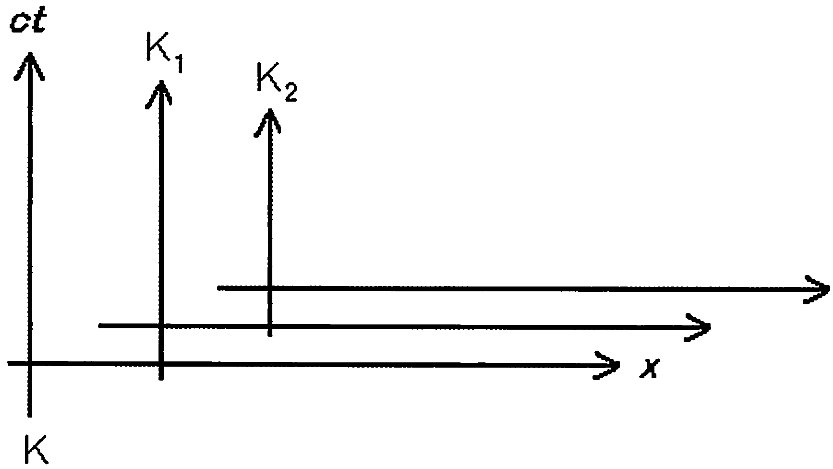

図1－1　3つの座標系

すると、

$$ds^2 = a(V_1)ds^2,\ ds^2 = a(V_2)ds_2^2$$
$$ds_1^2 = a(V_{21})ds_2^2 \tag{1-4}$$

となる。ここで V_{21} は、K_1 に対する K_2 の速度の絶対値、すなわち、V_2—V_1の絶対値である。

以上から、

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{21}) \tag{1-5}$$

が導かれる。

ところで、V_{21} は V_1 と V_2 の角度に依存する量であるが、(1-5) の左辺は角度に依存しない量である。したがって、

$$a(V) = 1 \tag{1-6}$$

が導かれる。これは、つまり、

$$ds^2 = ds'^2 \tag{1-7}$$

ということであり、世界間隔の座標変換に対する不変性を意味する。そして、世界間隔を不変にする座標変換として、ローレンツ変換を導くことができるのである。

以上は、4次元での話であるが、明らかに、これは3次元以上の時空に対して同様に成立するものである。しかし、2次元時空では、(1-1) から (1-7) が導かれない。本小論では、その点を指摘したい。

2．2次元時空での光速不変性

2次元時空では、世界間隔の定義は

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 \tag{2-1}$$

となるだけである。あとは、同様に、3つの座標系 K、K_1、K_2 に対し、(1-5) を導くことができる。

しかし、2次元時空の場合、空間が1次元であるため「V_1 と V_2 の角度」が 0° か 180° しか存在しない。そのため、一般に、a として、

$$a(V) = e^{2kV} \tag{2-2}$$

という解が存在してしまうのである。ここで、k は、パラメータである。
つまり、2次元時空における光速不変性は、

$$ds^2 = e^{2kV}ds'^2 \tag{2-3}$$

のように表現されるのである。

(2-3) のような制約のもと、座標変換は、次のようにパラメトライズすることができる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = e^{-kV}\begin{pmatrix} cosh\phi & -sinh\phi \\ -sinh\phi & cosh\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \tag{2-4}$$

そして、ϕ と V を結びつけるために、$x' = 0$ を考えると、

$$x = ct'e^{-kV}sinh\phi,\ ct = ct'e^{-kV}cosh\phi \tag{2-5}$$

となるから、

$$tanh\phi = \frac{V}{c} \tag{2-6}$$

がわかる。これは3次元以上の場合と同じであるが、その理由は、3次元の場合に比べ、座標変換に e^{kV} という因子がついただけだからである。

以上をまとめると、2次元時空における拡張されたローレンツ変換は次のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = e^{-kV}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} & \frac{-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\ \frac{-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \tag{2-7}$$

もちろん、特殊な場合として、通常のローレンツ変換も含まれている。

(2-7) は、1次元空間の異方性を意味するので、「きれいな対称性」はない。しかし、

単純な「光速不変の原理」から導かれるものであり、また、しばしば現れる２次元の特殊性[３]からも興味深いものだと思われる。

なお、座標変換（2-7）は、世界間隔の２乗に正の因子をもたらすだけなので、ds^2 の正負を変えることはない。つまり、２次元時空は、光の通り道を境に、時間的部分と空間的部分に分けられ、それらが座標変換（2-7）によって混じることはない。

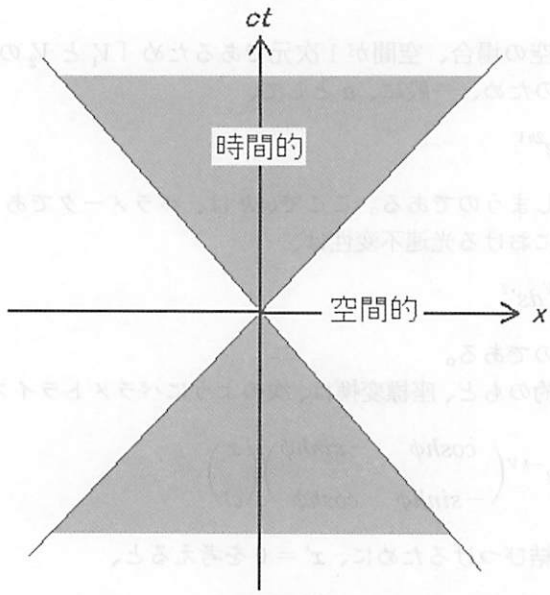

図２－１　時間的部分と空間的部分

３．ローレンツ短縮、固有時間、速度の合成則

この節では、４次元時空の場合に従って、２次元時空の拡張されたローレンツ変換について考察し、ローレンツ短縮、固有時間、速度の合成則を導く。

まず、ローレンツ変換は、考えているものの速さが小さい極限では、ガリレオ変換に一致することが知られている。(2-7) は、$\dfrac{V}{c} \sim 0$ であるとき、

$$x' \sim e^{-kV}(x - Vt),\ t' \sim e^{-kV}t \tag{3-1}$$

となるので、

$$k \sim \frac{1}{c} \tag{3-2}$$

であれば、(2-7) も考えているものの速さが小さい極限では、ガリレオ変換に一致する。このような時空の物理を考えることができるのかは、今後の課題であるが、(3-2) は、最初に現れる「物理条件」と考えられる。

以下の議論では、この「物理条件」を仮定する必要はないが、仮定すると、多くの結果がローレンツ変換の場合と同様になる。

たとえば、ローレンツ短縮であるが、静止系においた長さ ℓ_0 の棒の描く世界線から、速さ V で動いている棒の長さ ℓ は

$$\ell = \ell_0 e^{kV}\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} \tag{3-3}$$

となる。

これは必ずしも「短縮」ではない。しかし、k が (3-2) のように小さいと考えると、短縮になっている。また、いずれにしても、$V \to c$ の極限で ℓ は 0 になることにも注意したい。

固有時間も同様に

$$\triangle t = \triangle t_0 \frac{e^{kV}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \tag{3-4}$$

となる。

速度の合成則は

$$dx = \frac{e^{kV}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}(dx'+Vdt'),\ dt = \frac{e^{kV}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}(dt'+\frac{V}{c^2}dx') \tag{3-5}$$

より、

$$v = \frac{v'+V}{1+v'\frac{V}{c^2}} \tag{3-6}$$

が導かれる。これは、3次元以上の場合とまったく同じである。特に、光速以下で移動する物体は、どのような座標系から見ても光速以下であることが直接示されたことになる。

4. 考察

速度 v で移動する物体のラグランジアンを、単純に導くことはできない。たとえば、一般のローレンツ変換に対して不変なラグランジアン $-mc^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ は、

$$\delta L = (e^{kv}-1)L \tag{4-1}$$

という変換性を持ってしまう。これは、まったく異なるラグランジアンの存在を示唆するものかもしれない。

しかし、また、一種の共系不変理論[3][4]に結びつくのかもしれない。たとえば、

$$L = -mc^2\phi\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{4-2}$$

のようなラグランジアンを考えることも可能である。ここで ϕ は、(4-1) に現れる因子を吸収するための場である。

このように、「２次元における光速不変の原理」が、なんらかの物理を表しているのか、あるいは、単なる幾何学の問題にすぎないのかは、今後の研究課題である。後者であったとしても、これまでの「２次元」の応用を考えると、十分、研究に値するものであると考える。

謝辞

いつもいろいろとご指導くださる京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻の植松恒夫教授、また、私の大学院時代の指導教官である東京大学理学部の宮沢弘成名誉教授に感謝致します。

参考文献

[１] ランダウ、リフシッツ『場の古典論』東京図書
[２] アインシュタイン『相対論の意味』岩波書店
[３] C. Itzykson H.Saleur J-B. Zuber『Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics』World Scientific
[４] A.A.Belavin A.M.Polyakov A.B.Zamolodchikov『Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory』Nucl. Phys. B241 (1984) 333