

静岡産業大学 情報学部 研究紀要
Journal of Shizuoka Sangyo University
第24号 (2022) 別刷

低ランクLie代数の表現

The representations of low rank Lie algebras

小林健一郎

Ken-ichiro KOBAYASHI

静岡産業大学 情報学部

低ランク Lie 代数の表現

The representations of low rank Lie algebras

小林健一郎

Ken-ichiro KOBAYASHI

(令和 3 年 10 月 4 日受理)

Keyword Lie 代数、行列、表現、解説

要旨

ゼミ研究において Lie 代数の表現の一般論を学び、その低ランクなものについては実際に構成した。

その成果を報告する。

1. はじめに

演算子が特定の交換関係を満たす代数を Lie 代数とよぶ。交換関係とは、

$$[X, Y] = XY - YX$$

のことである。

Lie 代数の理論には完成された美しさがあり、それ自体大変興味深い [1]。一方、物理学への応用も広く、 $su(2)$ や $so(3)$ といった低ランク Lie 代数の具体的な表現が重要である。これらは、完成された理論の例題にすぎず、多くの場所で論じられてはいるが、それぞれの興味に応じてバラバラになっていることが多い。このゼミではまとめて具体的に示した。

この解説では数学的に厳密な扱いより、具体性を重視する。特に [1][2][3] を参考にしている。

2. $sl(2, \mathbb{C})$

$sl(2, \mathbb{C})$ はもっとも基本的な Lie 代数であり、次の交換関係で定義される。

$$[E, F] = H, [H, E] = 2E, [H, F] = -2F \quad (2-1)$$

すなわち、上のような交換関係をみたすものが $sl(2, \mathbb{C})$ ($su(2)$ とも言える) とよばれる Lie 代数なのである。

これは

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

の行列がなす交換関係である。

$sl(2, \mathbb{C})$ には、任意の正整数 n に対し、 $n + 1$ 次元の表現がある。それは次のようなものである。

$$Hv = nv, \quad Ev = 0, \quad F^{n+1}v = 0 \quad (2-3)$$

このとき、 $F^i v$ ($i = 1 \sim n$) たちはゼロではなく、 E と F で移り変わる。

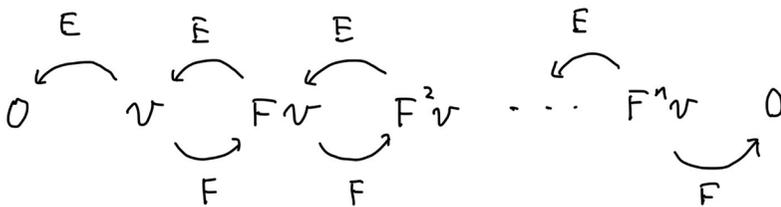


図 2-1 $sl(2, \mathbb{C})$ の $n + 1$ 次元表現

たとえば、 $n = 1$ のときが 2 次元表現であり、その行列表示が上で示したものになる。その行列たちが作用する v, Fv は次のようなものである。

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Fv = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

$Ev = 0, F^2 = 0$ であることは、容易に確かめることができる。なお、この v や Fv のようなものをベクトルとよぶ。

量子論的な電子はスピンとよばれる内部角運動量を持っている。その値は、上向きか下向きに応じて2つのみである。それが $sl(2, \mathbb{C})$ の2次元表現に対応していると考えられる。

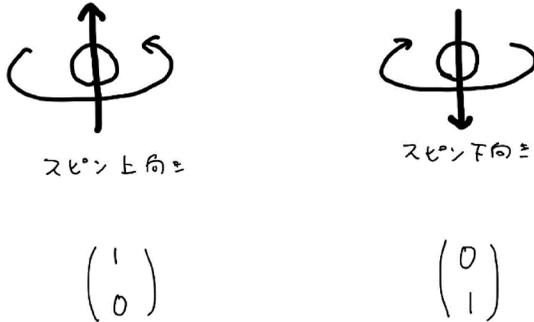


図 2-2 電子のスピンと $sl(2, \mathbb{C})$ の2次元表現の対応

物理でスピン s というのは、 $sl(2, \mathbb{C})$ の $2s + 1$ 次元表現に相当する。したがって、スピン $1/2$ は2次元表現なのである。スピン $1/2$ の粒子が2つ複合すると、2次元表現 \times 2次元表現で“4”次元表現ができるが、実際には、それは3次元表現と1次元表現の和になる。1次元表現とは、 $sl(2, \mathbb{C})$ で変換を受けないベクトルということである。

しばしば \uparrow を上向き矢印、 \downarrow を下向き矢印で表記する。すると、スピン $1/2$ の粒子の複合は次のように図示できる。

$$\begin{aligned}
 & (\uparrow \oplus \downarrow) \otimes (\uparrow \oplus \downarrow) \\
 = & (\uparrow\uparrow \oplus (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \oplus \downarrow\downarrow) \oplus (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \\
 & \quad \begin{array}{c} \text{3次元表現} \\ \text{4} \\ \text{スピン 1} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{1次元表現} \\ \text{1} \\ \text{スピン 0} \end{array}
 \end{aligned}$$

図 2-3 スピン $1/2$ 粒子の合成と $sl(2, \mathbb{C})$ の表現

この合成のプロセスは、以下の図のように考えることができる。

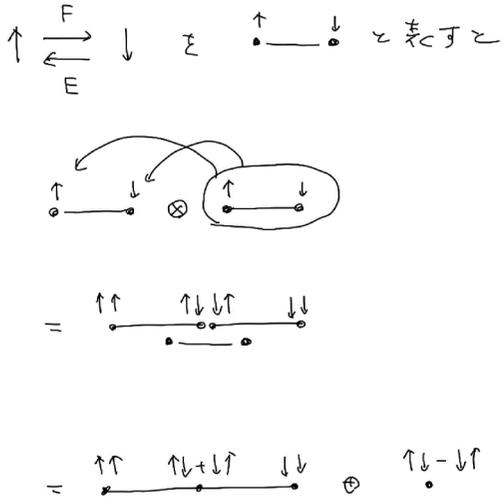


図 2-4 スピン 1/2 粒子の合成の考え方

⊗ (テンソル積という) の計算では、「左側の 2次元表現の黒い 2つの点のそれぞれの上に、右側の表現を乗せる」というイメージである。そうすると、左端と右端は ↑↑ と ↓↓ となるが、真ん中には ↑↓ と ↓↑ の 2つがあることになる。これらの和が 3次元表現の 1部となり、差が独立して 1次元表現になるのである。

3次元表現、1次元表現とは E、F の作用に対して次のようになるということである。

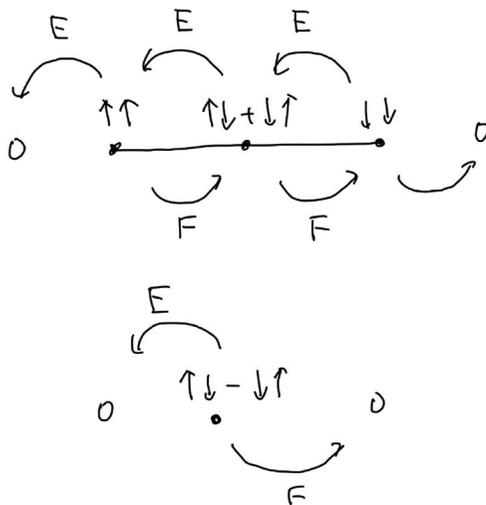


図 2-5 合成された表現の構造

図 2-5 の構造は、Lie 代数の演算子 (E や F) は微分のように働くこと、 $E(\uparrow) = 0$ を使って、計算で確かめることもできる。たとえば、

$$\begin{aligned} E(\downarrow\downarrow) &= E(\downarrow)\downarrow + \downarrow E(\downarrow) = \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow \\ E(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) &= E(\uparrow)\downarrow + \uparrow E(\downarrow) + E(\downarrow)\uparrow + \downarrow E(\uparrow) = 2\uparrow\uparrow \end{aligned} \quad (2-5)$$

また、

$$E(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = E(\uparrow)\downarrow + \uparrow E(\downarrow) - E(\downarrow)\uparrow - \downarrow E(\uparrow) = \uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow = 0 \quad (2-6)$$

である。

この計算にあるように、一般に係数が 1 ではなくなるが、図 2-4 などには書いていない。これは以下も同様である。これらの係数は重要であるが、ここでは論じないのである。

「スピンを持った粒子の合成」というときわめて神秘的で複雑な印象を与える（実際、その深奥は簡単ではないと思う）が、とても単純に計算できるということを強調しておきたい。

3. so(3)

我々の目に見える世界は 3 次元の広がりを持っている。3 次元の世界では、「原点を中心に回転」を考えることができる。

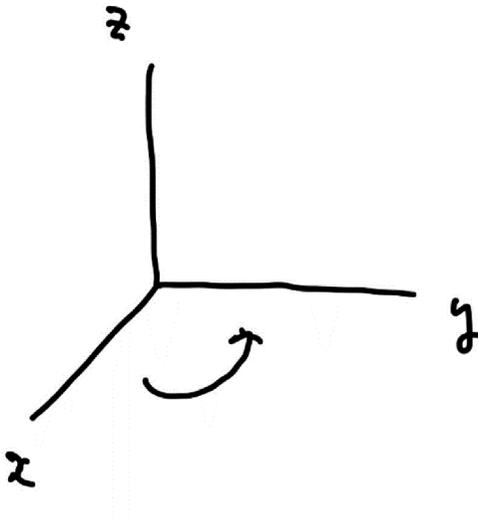


図 3-1 回転の例：z 軸の周りに回転

図 3-1 の回転は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

のような行列で表される。

Lie 代数の演算子は、このような変化の「無限小の変化」を表すものと考えられる。「無限小の変化」とは上の行列で θ を小さくし、それから単位行列（「無変化」を表す）を引いたものである。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \doteq & \begin{pmatrix} 1 & -\theta & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-2)$$

回転は、z 軸周りだけでなく、x 軸周り、y 軸周りもあり、それぞれについて「無限小変化」の行列を書きだし、まとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-3)$$

これらは、 $\mathfrak{so}(3)$ とよばれる Lie 代数をなす。すなわち、次のような交換関係を満たす。

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3 \\ [e_2, e_3] &= e_1 \\ [e_3, e_1] &= e_2 \end{aligned} \quad (3-4)$$

実は、これらは組み替えると $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の Lie 代数になる。

$$\begin{aligned}
e &= -ie_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \\
f &= -ie_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \\
h &= -2ie_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3-5}$$

上のように組み直すと、この e 、 f 、 h が (3-1) の E 、 F 、 H と同じ交換関係を満たすことが確かめられるのである。

行列が 3×3 であるので、行列が作用する空間も 3 次元である。これは、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3-6}$$

を組み替えると $sl(2, \mathbb{C})$ の表現であることがはっきり見えるということである（はっきり見えなくても表現にはなっている）。それは、次のようなものである。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3-7}$$

これで三次元空間内の回転を表す $so(3)$ と電子のスピンを表す $sl(2, \mathbb{C})$ が、本質的に同じ（無限小レベルでは一致する）ものであることがわかった。これは、スピンが角運動量（回転に対する運動量）の一種であることを示している。

このような一見異なる Lie 代数が一致することは偶然的な同型などとよばれる。これは、もちろん、完全にわかっている。

4. $so(4)$ と $sl(2, \mathbb{C}) \times sl(2, \mathbb{C})$

$so(4)$ の演算子を前節のように構成すると、反対称な 4×4 行列を集めればよいということになる。

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 e_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & e_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (4-1) \\
 e_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & e_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$so(4)$ と $sl(2, \mathbb{C}) \times sl(2, \mathbb{C})$ は同型であることが知られている。 $so(4)$ の演算子を前節のようにうまく組み合わせれば $sl(2, \mathbb{C})$ が 2 つできる。

5. $sl(3, \mathbb{C})$

陽子やパイオンなどを構成するクォークは $sl(3, \mathbb{C})$ の内部対称性（時空とは別の対称性）を持つことが知られている。これはカラー対称性などとよばれる。また、フレーバーとよばれるクォークの種類も近似的に $sl(3, \mathbb{C})$ に従うと考えられている。そのため、 $sl(3, \mathbb{C})$ の解説は $sl(2, \mathbb{C})$ とならんで多くの物理の文献に詳細がある。それらは、主に、ゲルマンがはじめた物理流儀のやり方であるので、ここでは [1] などに従った「数学の流儀」（諸説あるだろうが）に沿うやり方で詳細を示したい。後ほどフレーバーについて述べる。

$sl(3, \mathbb{C})$ は次のような行列のなす交換関係によって定義される。

$$\begin{aligned}
 H_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & H_{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 H_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -H_{12} + H_{13} \\
 E_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 E_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 E_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{32} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

交換関係は次のようにまとめることができる。

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \text{とおく。}$$

$$\text{ただし } a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$[H, E_{ij}] = (a_i - a_j) E_{ij} \tag{5-2}$$

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

$$[E_{ij}, E_{ji}] = H_{ij}$$

$sl(2, \mathbb{C})$ の表現は直線上に広がったが、 $sl(3, \mathbb{C})$ の表現は2次元上に広がっていく。また最小の表現は3次元表現である。ただし、3次元表現は2つあるので、ひとつを基本表現、もうひとつをその双対表現などという。

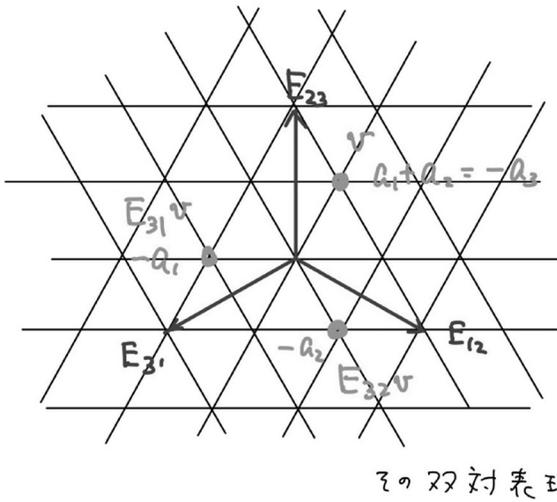
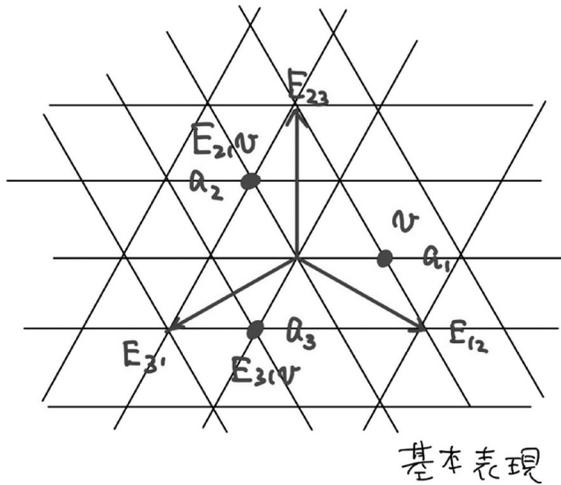


図 5-1 $sl(3, \mathbb{C})$ の基本表現とその双対表現

図 5-1 の上の図では、 $v, E_{21}v, E_{31}v$ が 3 次元表現をなしている。また、付随する a_1, a_2, a_3 は、上の H の値 (H を作用させて現れる値) である。つまり、 $Hv = a_1v$ 、 $H(E_{21}v) = a_2(E_{21}v)$ 、 $H(E_{31}v) = a_3(E_{31}v)$ ということである。これは、 E_{ij} を作用させると H の値が $a_i - a_j$ だけ増えることを意味している。たとえば、 v の H の値は a_1 だが、 E_{21} を作用させた $E_{21}v$ の H の値は $a_1 + (a_2 - a_1)$ で a_2 になるわけである。双対表現の方も同様である。

6次元表現のひとつは次のようになる。

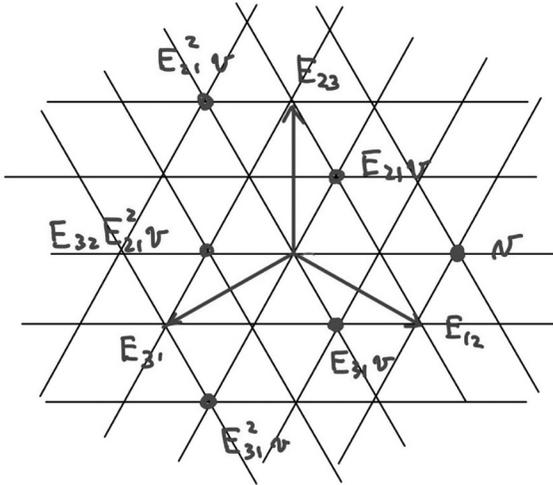


図 5-2 6次元表現のひとつ

ここで、 $Hv = 2a_1 v$ である。

8次元表現は次のようになる。

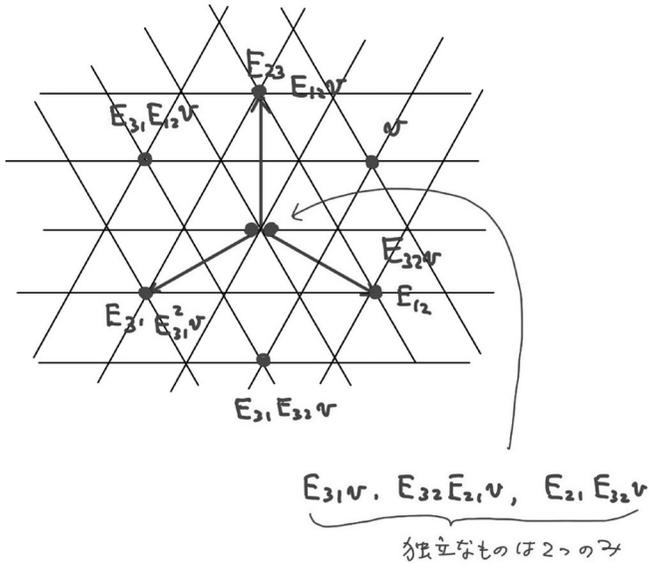


図 5-3 $sl(3, \mathbb{C})$ の 8次元表現 (真ん中には点が 2 つある)

ここで、 $Hv = (a_1 - a_3)v$ である。

これらの表現は、 $sl(2, \mathbb{C})$ のときと同様に基本表現から構成することができる。

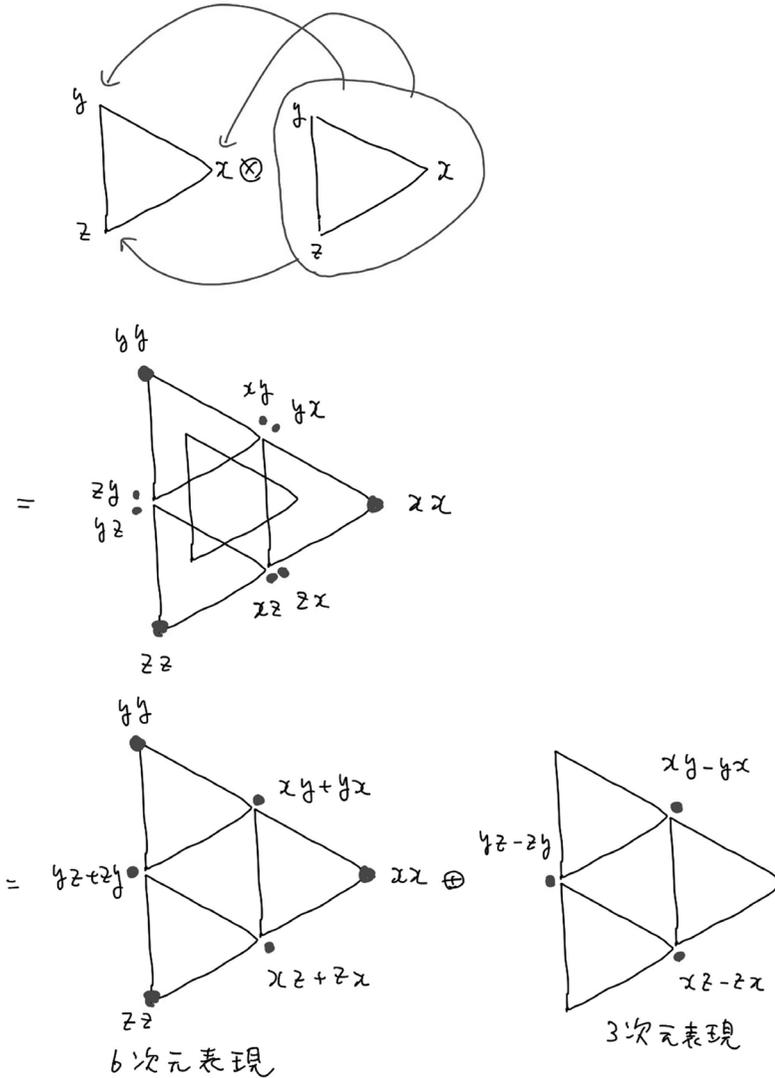


図 5-4 2つの基本表現の合成

図 5-4 で、 x 、 y 、 z は、それぞれ、 $E_{21}x = y$ 、 $E_{31}x = z$ 、 $E_{32}y = z$ などとなるものである。たとえば、

$$E_{31}(xy + yx) = E_{31}(x)y + x E_{31}(y) + E_{31}(y)x + y E_{31}(x) = zy + yz$$

$$E_{31}(xy - yx) = E_{31}(x)y + x E_{31}(y) - E_{31}(y)x - y E_{31}(x) = zy - yz$$

$$\begin{aligned}
 E_{21}(xy + yx) &= E_{21}(x)y + x E_{21}(y) + E_{21}(y)x + y E_{21}(x) = 2yy \\
 E_{21}(xy - yx) &= E_{21}(x)y + x E_{21}(y) - E_{21}(y)x - y E_{21}(x) = 0
 \end{aligned}
 \tag{5-3}$$

などから、3次元表現×3次元表現が6次元表現と3次元双対表現になっていることを確かめることができる。

8次元表現は、基本表現とその双対表現から作ることができる。

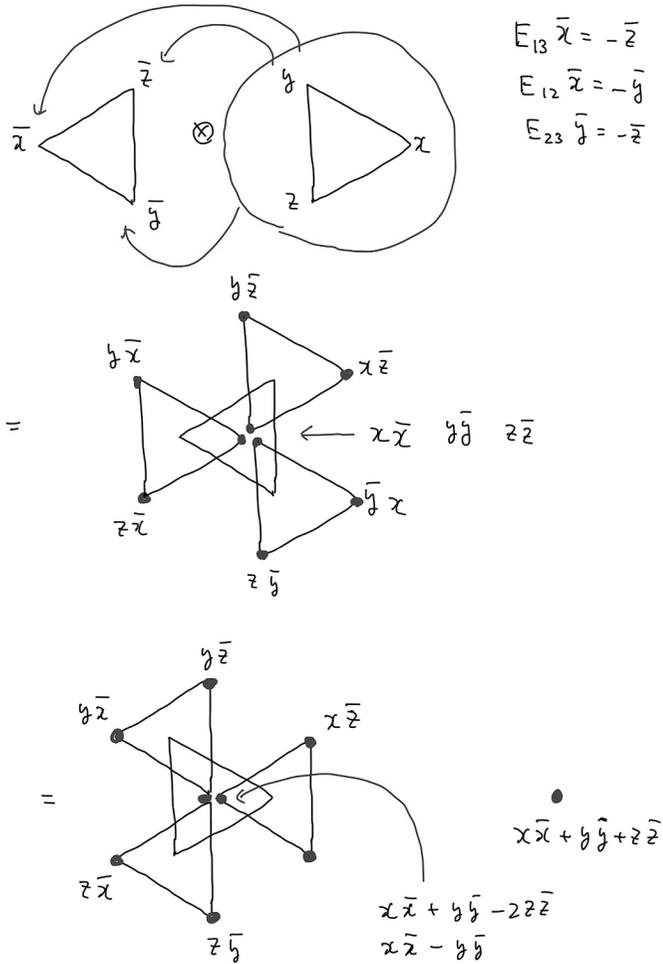


図 5-5 基本表現と双対表現の合成

図 5-5 で、 \bar{x} 、 \bar{y} 、 \bar{z} は、それぞれ、 $E_{13}\bar{x} = -\bar{z}$ 、 $E_{12}\bar{x} = -\bar{y}$ 、 $E_{23}\bar{y} = -\bar{z}$ などとなるものである。ただし、真ん中にできた 3 つのベクトル中、 $x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}$ は、独立して 1 次元表現に

なる。
それは、

$$\begin{aligned}
 & E_{31}(x \bar{x} + y \bar{y} + z \bar{z}) \\
 &= E_{31}(x) \bar{x} + x E_{31}(\bar{x}) + E_{31}(y) \bar{y} + y E_{31}(\bar{y}) + E_{31}(z) \bar{z} + z E_{31}(\bar{z}) \\
 &= -x\bar{z} + x\bar{z} = 0
 \end{aligned} \tag{5-4}$$

などから確認することができる。

通常物質はクォークとレプトンからできていると考えられている。クォークには、u、d、s などとその反粒子 \bar{u} 、 \bar{d} 、 \bar{s} などがある。たとえば、陽子は2つのuと1つのdからできている。このようなクォークの種類をフレーバーなどという。そして、近似的にu、d、s が $su(3, C)$ の基本表現、 \bar{u} 、 \bar{d} 、 \bar{s} がその双対表現になっている。この対称性は、実際に意味があるのか、単なる偶然なのか意見が分かれるところだが、そのように考えるといろいろな実験事実が「説明」できることも確かである。

このフレーバー対称性の考え方に従うと、陽子などは $su(3, C)$ の3次元表現 (u、d、s クォーク) を3つ合成したものの中に現れる8次元表現の中の一つということになる。ここでは、より簡単なメソンを見ておく。

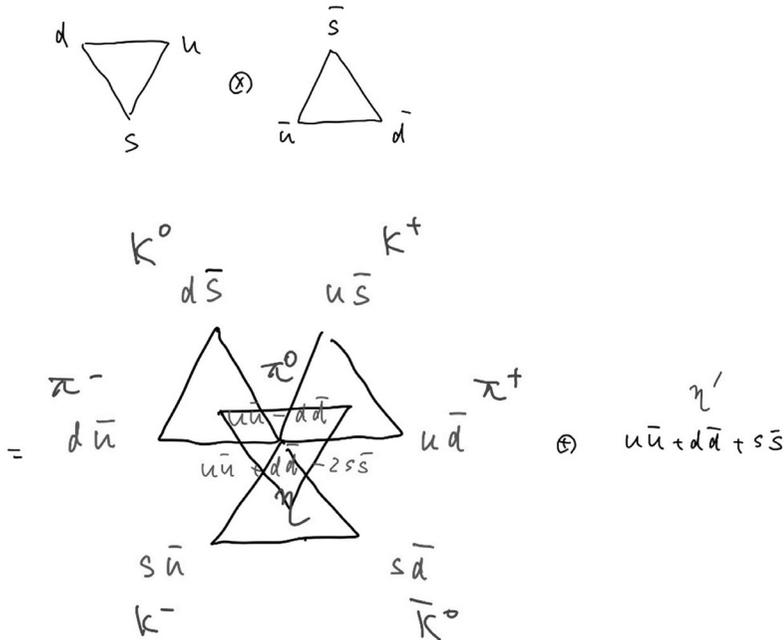


図5-6 メソン

ただし、図 5-6 では物理の慣習に従い、基本表現の三角形の角度を少し変えたが、本質的な違いはない。

なお、 $sl(3, \mathbb{C})$ は $sl(2, \mathbb{C})$ を含んでいる。u、d、s を $sl(3, \mathbb{C})$ の表現と考えるのではなく、u、d を $sl(2, \mathbb{C})$ の 2 次元表現と考えると、パイオンは $sl(2, \mathbb{C})$ の 3 次元表現ということになる (図 5-6 を参照)。こちらの方が近似の精度はあがる。

6. $sl(4, \mathbb{C})$

$sl(4, \mathbb{C})$ は、次のような 4×4 行列のなす交換関係で定義される。

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

$$E_{ij} = i \text{ 行} \begin{pmatrix} & & & j \text{ 列} \\ & & & 0 \\ \cdots & & & \vdots \\ & & & 1 \\ \cdots & & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (6-1)$$

$$[H, E_{ij}] = (a_i - a_j) E_{ij}$$

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}$$

$$[E_{ij}, E_{ji}] = H_{ij}$$

$sl(2, \mathbb{C})$ の表現は直線、 $sl(3, \mathbb{C})$ の表現は平面に乗った。 $sl(4, \mathbb{C})$ の表現は 3 次元空間になる。これまで見てきたように、表現とは、ベクトルたちを演算子で動かすものだった。演算子の作用は表現空間の中で単純な移動によってあらわすことができた。

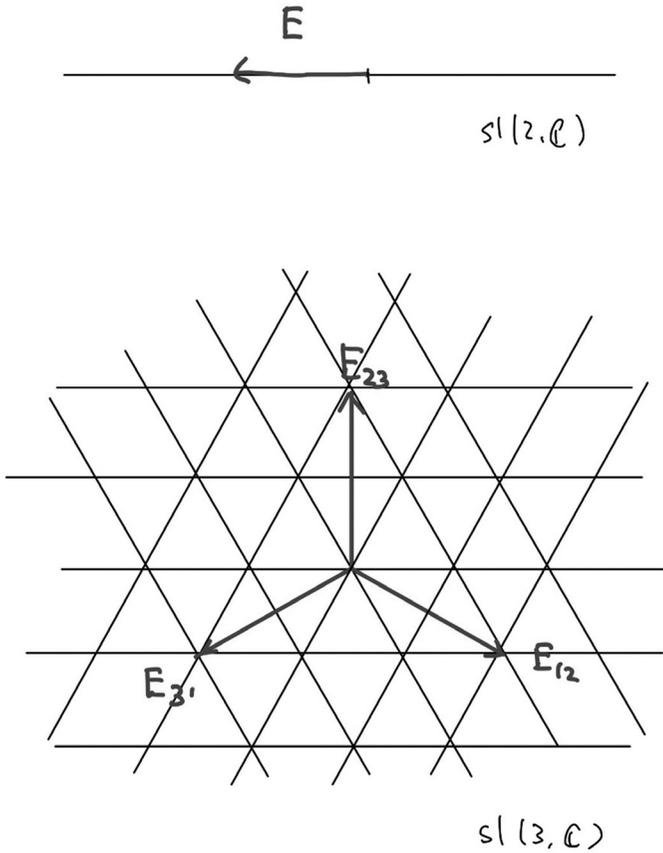


図 6-1 $sl(2, \mathbb{C})$ と $sl(3, \mathbb{C})$ の演算子

どの「移動」にも逆向きの「移動」を意味する演算子がある。たとえば、 $sl(2, \mathbb{C})$ の場合、 E に対する F である。また、 H などで表される「移動しない」演算子もある。これは、図が煩雑になるので描かなかった。 $sl(3, \mathbb{C})$ の場合、たとえば、 E_{12} の逆の「移動」は E_{21} である。

$sl(4, \mathbb{C})$ では、演算子の「移動」は次のようになる。

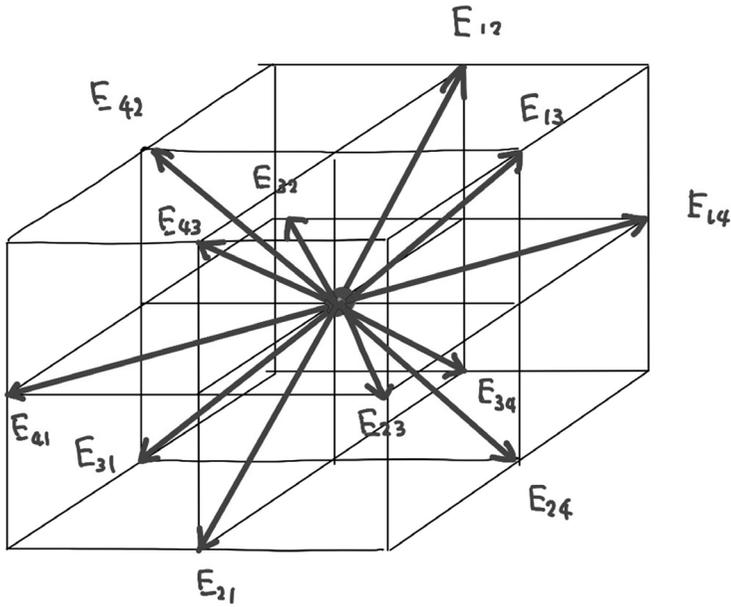


図 6-2 $sl(4, \mathbb{C})$ の演算子

その基本表現と双対を図示すると次のようになる。

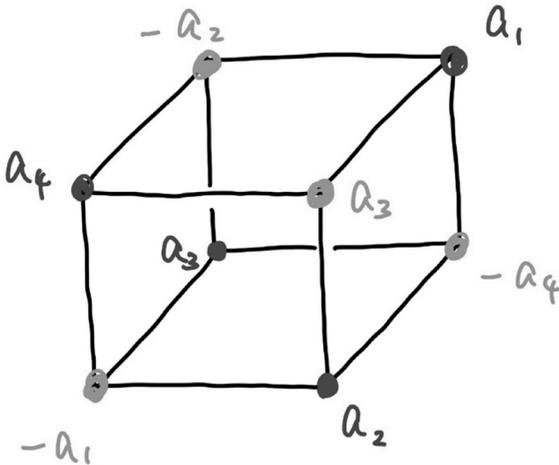


図 6-3 $sl(4, \mathbb{C})$ の基本表現と双対表現

ここで、各頂点が表現のベクトルを表し、 a_1 などは H の値を示す。 a_1, a_2, a_3, a_4 の 4 つが一組で基本表現 (4 次元表現) になり、 $-a_1, -a_2, -a_3, -a_4$ の 4 つが一組で基本表現の

双対表現（別の4次元表現）になる。これらは、それぞれ正四面体になっていて、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の線分、 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の正三角形の拡張になっていることがわかる。これらを組み合わせてより高次元の表現を作ることも、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ や $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のときと同様である。

謝辞

この内容は主に2020年のゼミ研究で考えたものである。ゼミ生の佐藤奏一朗君に感謝致します。

- [1] J. Humphreys, “Introduction to Lie Algebras and Representation Theory”
- [2] W. Fulton and J. Harris, “Representation Theory”
- [2] H. Geroigi, “Lie Algebras In Particle Physics”