1次元最適施設配置問題(2)
― 最適施設配置の分布について ―

青 木 優

Ⅰ．はじめに

筆者は、これまでにTanner-Sherrattモデル[1]、及びNewlingモデル[1]について、2次元最適施設配置問題をシミュレーティッド・アニーリング法[2]によって、数値的に解いてきた。その結果、最適施設配置にも物理学の分野で言われる原子クラスターのマジックナンバーと類似したマジックナンバーを発見し、これを「施設クラスターのマジックナンバー」と名付けた[3]。また、最適施設配置の分類をおこなうことによって、施設数の増加に伴い施設クラスター中心付近の配置に規則性が現れることを発見した[4]。

前回の研究[5]では、1次元のTanner-Sherrattモデルを高い精度で解く為に数値積分を使わない計算式を導出し、施設数が200までの最適配置を求めた。その結果、最も外側の、つまり需要分布の最も低い地域における一人当たりの平均利用費用が極端に大きくなることがわかった。これは、最適配置が利用者総費用を最小にするように決定されているためである。このばらつきを緩和するためには、最適化問題における目的関数を改良する必要があることを問題提起した。

さらに、実際に求められた最適配置の様子を示すため、第1図のような施設数が20の場合の最適配置を示した。需要分布が原点集中型であることから、施設の位置も原点集中型となっている。しかし、これだけでは求められた最適施設配置の分布を定量的に理解することはできない。直感的には、施設の分布は需要分布と類似すると考えられるが、全く同じ分布になるかどうかはわからない。そこで、今回の研究では、さらに施設数を3000まで増やして、最適施設配置の分布と需要分布の比較をおこなう。また、需要分布の標準偏差 σ を変えて、任意の σ についても成り立つ普遍的な法則を発見することを目的とする。

---

1) 伊理正夫『計算幾何学と地理情報処理』 共立出版 1997年、165～166ページ。M. Iri, K. Murota, and T. Ohya, "A First Voronoi-Diagram Algorithm with Applications to Geographical Optimization Problems", *Proceedings of the 11th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Copenhagen Lecture Notes in Control and Information Science 59, System Modelling and Optimization,* Springer-Verlag, Berlin, 1983, pp.273～288.

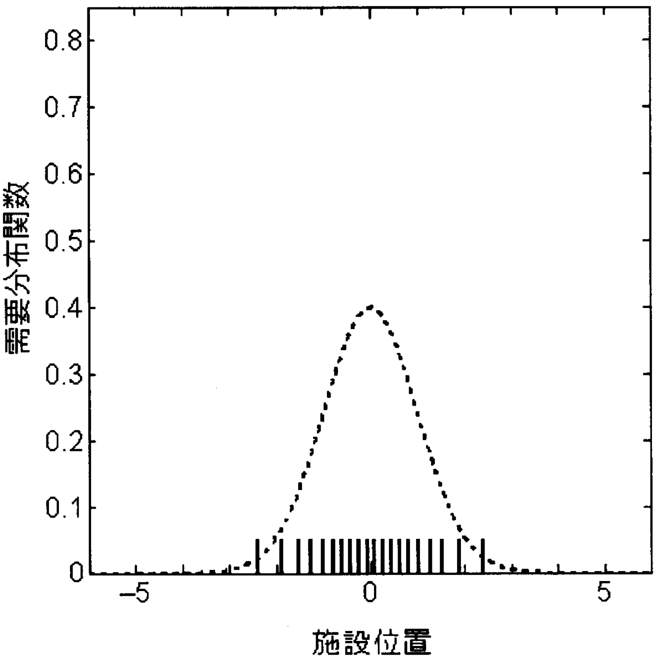
2) 上田顕『コンピュータシミュレーション ―マクロな系の中の原子運動―』 朝倉書店 1992年、10～43ページ。

3) 青木優「Tanner-Sherrattモデルにおける最適施設配置問題」『青山経済論集』（青山学院大学）第52巻第2号、2000年、5～21ページ。青木優「Newlingモデルにおける最適施設配置問題」『環境と経営』（静岡産業大学）第7巻第2号、2001年、31～41ページ。

4) 青木優「Tanner-Sherrattモデルにおける最適施設配置問題―最適配置の分類―」『環境と経営』（静岡産業大学）第8巻第2号、2002年、81-88ページ。

5) 青木優「1次元最適施設配置問題―施設利用に関する問題点―」『環境と経営』（静岡産業大学）第11巻第1号、2005年、93～101ページ。

第１図：σ＝1.0におけるＮ＝20の場合の最適配置（実線）と需要分布（破線）



出典：青木優　「１次元最適施設配置問題―施設利用に関する問題点―」　『環境と経営』（静岡産業大学）第11巻第１号、2005年、99ページ。

II．最適施設配置問題

本研究では、次に示す利用者の費用を最小にする１次元最適施設配置問題を扱う。Ｎ個の施設を $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$, ･･･, $P_N(x_N)$ と表す。位置 $\mathbf{x}$ に居る利用者が施設 $P_i(x_i)$ を利用するための費用は、利用者と施設の距離 $|x-x_i|$ だけによるものとする。利用者は必ず費用の最も小さい施設を利用するとすれば各施設の勢力圏は、各施設 $P_i(x_i)$ を母点とする Voronoi 領域 V_i [6)]となる。このように、施設までの道程（利用費用）は、すべて直線であるとする仮定の妥当性は、理論的には Davidson[7)]により、また、実際のデータによる検証は腰塚と小林[8)]によってすでに研究されており、施設までの道路距離を地図上の直線距離で表す仮定は比較的良い近似であり、それを用いた Voronoi 図による結果も信頼できることがわかっている。

このような仮定を用いた場合、利用者総費用Ｅは次のように表される。

$$E[x_1,\cdots,x_N]=\sum_{i=1}^{N}E_i \tag{1}$$

ここで、

$$E_i=\int_{V_i}|x-x_i|\rho(x)dx \tag{2}$$

6) G. Voronoi, “Nouvelles applications des paramètres continues à la thèorie des formes quadratiques” *J. Reine Angew. Math.* vol.134, 1908, pp.198～287.

7) R. Davidson, “Line-Processes, Road and Fibers” *Stochastic Geometry,* E.F. Harding and D.G. Kendall, eds., Jhon Wiley, London, 1974, pp248～251.

8) 腰塚武志，小林純一「道路距離と直線距離」『日本都市計画学会学術研究発表会論文集』、1983年、43～48ページ。

である。

したがって、施設数Nと需要分布関数 $\rho(x)$ が与えられれば利用者総費用を最小化する問題は式(1)の目的関数Eを最小にする施設の位置 $x_1, \cdots, x_N$ を求めるN次元非線形最適化問題として定式化される。本研究では、需要分布関数 $\rho(x)$ を Tanner-Sherratt モデル（正規分布）：

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3}$$

とする。ただし、 σ は標準偏差である。

この最適化問題を解くためには、

$$\frac{\partial E[x_1, \cdots, x_N]}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, \cdots, N \tag{4}$$

を同時に満たす $x_1, \cdots, x_N$ を求めることになる。解くべき具体的な式は、前回の研究[9]で導出した式を使い、最急降下法によって最適解を求めることにする。また、最急降下法の初期値 $x_1, \cdots, x_N$ は、

$$\begin{aligned} x_0 &= \sigma\left(-\frac{3}{2} - \log_{10} N\right) \Big/ (N+1), \\ x_i &= x_{i-1} + n \cdot \Delta x, \qquad \Delta x = 2\sigma\left(\frac{3}{2} + \log_{10} N\right) \Big/ (N+1) \end{aligned} \tag{5}$$

とし、$E_i (i = 1, \cdots, N)$ の収束は 10^{-16} とした。

Ⅲ. 結果と考察

本研究では、Tanner-Sherratt モデルにおける最適施設配置問題を、需要分布の標準偏差 σ が0.5,1.0,2.0の3つの場合に対して、それぞれ施設数Nが3000まで解いた。

標準偏差 σ の需要分布における最適施設配置の座標は、$\sigma=1.0$ の場合に比べて σ 倍になると予測できる。計算の結果、その予想が正しいことを $\sigma=0.5, 1.0, 2.0$ の3つの場合を比較することによって、定量的に確かめた。また、第2図(a)と(b)に、それぞれ $\sigma=0.5$ と2.0におけるN＝20の場合の最適施設配置を示す。第1図と比較して、このことが視覚的にも確認できる。以上の議論より、これ以降の結果は $\sigma=1.0$ の場合に関するものであるが、そこからわかる事実は σ に依存しないことがわかる。

最適施設配置は、需要分布の高い辺りでは密集し、また需要分布の低い辺りでは疎らになることが予測される。直感的に施設を配置する場合には、そのようにして配置が決められるであろう。しかし、需要分布と施設の分布が全く同じになる保障は何処にも無い。そこで、施設数300と3000の場合について、階級幅を0.4とした場合の施設の度数分布を求め、需要分布と比較できるように規格化し、第3図(a)と(b)にそれぞれ黒丸でプロットした。以後、本稿に於いては、この分布を施設分布と呼ぶことにする。また、施設分布の標準偏差 ξ を求め、それと同じ標準偏差を持つ正規分布を実線で描き、需要分布は破線で描いた。

第3図(a)と(b)から、施設分布は、ほぼ正規分布となることがわかる。また、その分布の広がりは、需要分布よりも広くなっている。このことから、需要分布と施設分布は、必ずしも一致しないことがわかる。

---

9) 青木　「1次元最適施設配置問題」、93～101ページ。

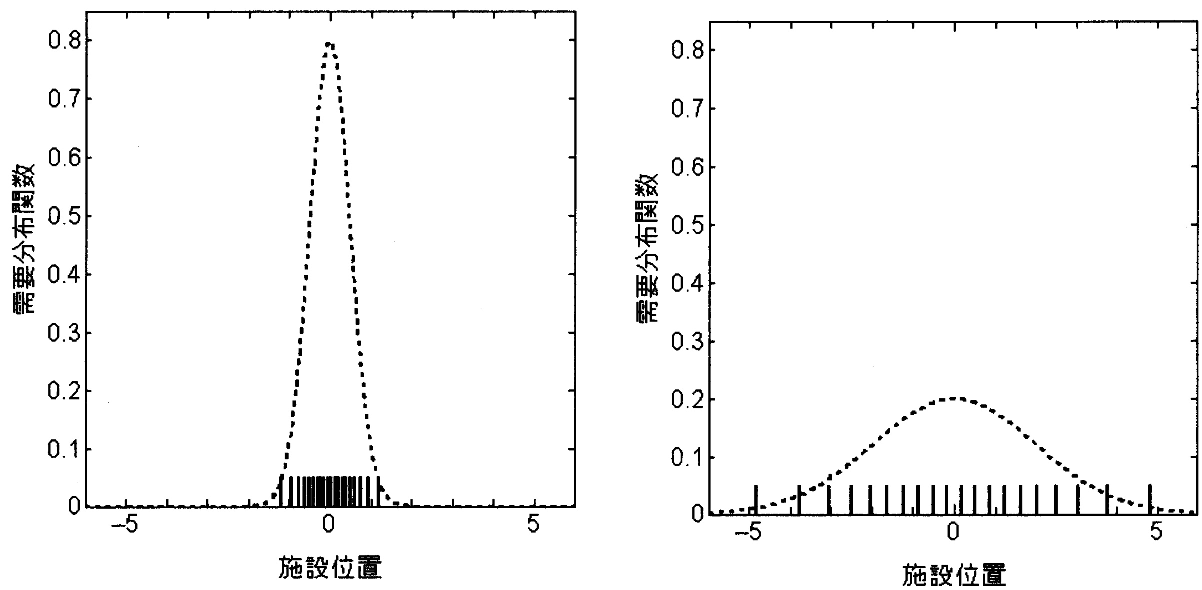
次に、需要分布と施設分布の広がりは、どの程度異なっているのであろうか。これを調べる為に最適施設配置の座標から直接に標準偏差 ξ を求めると、N＝300の場合が $\xi \fallingdotseq 1.3928$ であり、N＝3000の場合が $\xi \fallingdotseq 1.4116$ であった。したがって、$\xi \fallingdotseq 1.4$ ということがわかる。ここで、さらに疑問が浮かぶ。ξ には施設数依存性があるのだろうか。それを確かめるため、Nが3000以下の場合について ξ を求め、第4図に黒丸でプロットした。実線はその黒丸をスプライン補間したものである。また、第1表にはその数値データを示す。

第4図を見ると、施設数が4以下の場合には、標準偏差 ξ が1以下であり、施設分布の広がりは、需要分布（$\sigma=1$）よりも小さいことがわかる。また、施設数が5の場合は、ξ がほぼ1であり、需要分布と施設分布がほぼ同じ分布となっていることがわかる。さらに、施設数が6以上の場合は、施設数が増えるにしたがって ξ も大きくなり、1.4を超えた辺りで収束している。このことを更に詳しく調べる為に、第1表の数値データを見ると、ほぼ $\sqrt{2}$ に収束していることがわかる。「ほぼ」という言葉を取り去って、厳密に「$\sqrt{2}\sigma$ に収束する」かどうかを確かめるには、数学的な証明が必要となる。しかし、本稿ではこの証明は避けることにして、「ほぼ $\sqrt{2}\sigma$ に収束する」ということにしておく。

需要分布に従って施設を最適に配置しようとする場合、直感的には需要分布と同じ分布で施設を配置した方が良いように思えるが、実際には、目的関数を定めて、最適化問題をできる限り正確に解く必要があることがわかる。

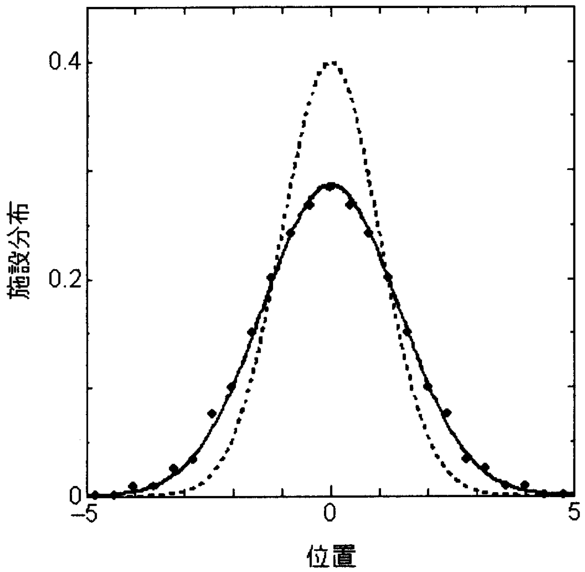
第2図：$\sigma=0.5$と2.0におけるN＝20の場合の最適配置（実線）と需要分布（破線）

(a) $\sigma=0.5$の場合　　　(b) $\sigma=2.0$の場合

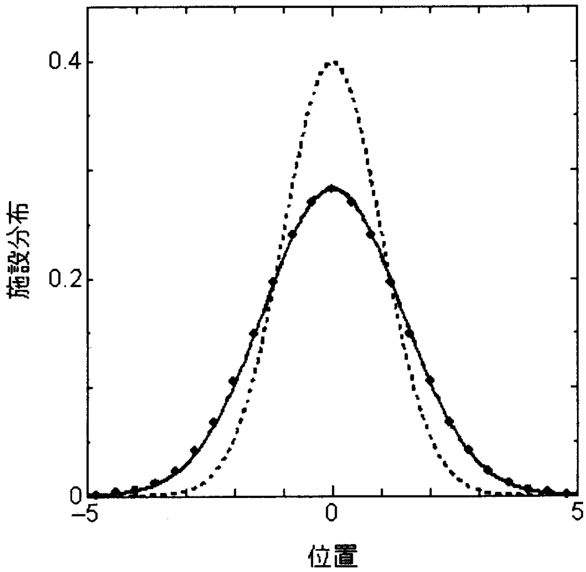


第 3 図：施設分布（黒丸）、標準偏差 ξ の正規分布（実線）と需要分布（破線）

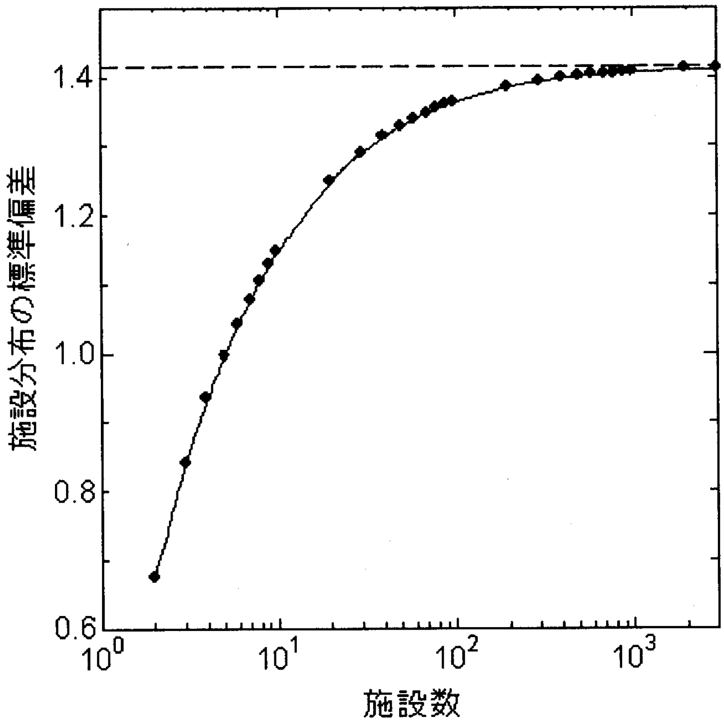
（a） N＝300の場合



（b） N＝3000の場合



第 4 図：施設数Nと施設分布の標準偏差 ξ の関係



第1表：施設数Nと施設分布の標準偏差ξの関係

施設数	施設分布の標準偏差	施設数	施設分布の標準偏差
2	0.67448971	80	1.35377434
3	0.84025367	90	1.35897899
4	0.93400916	100	1.36327765
5	0.99657181	200	1.38462446
6	1.04209242	300	1.39284048
7	1.07706958	400	1.39728875
8	1.10498327	500	1.40011724
9	1.12789261	600	1.40212380
10	1.14710543	700	1.40363048
20	1.24752798	800	1.40466320
30	1.28916077	900	1.40566113
40	1.31272334	1000	1.40650775
50	1.32812455	2000	1.41027387
60	1.33907971	3000	1.41163407
70	1.34732121		

Ⅳ. まとめ

今回の研究では、1次元Tanner-Sherrattモデルにおける利用者総費用を最小にする1次元最適施設配置問題について、施設数が3000までの最適配置を求めた。その結果、施設分布は、ほぼ正規分布となることがわかった。また、施設分布の標準偏差ξは、施設数が4以下の場合には1以下であり、施設分布の広がりは需要分布の広がりよりも小さくなり、施設数が5の場合は、ξがほぼ1であり、需要分布と施設分布がほぼ同じ分布であった。施設数が6以上の場合は、施設数が増えるにしたがってξも大きくなり、ほぼ$\sqrt{2}\sigma$に収束することがわかった。

需要分布に従って施設を最適に配置しようとする場合、直感的に需要分布と同じ分布で施設を配置してはならず、目的関数を定めて、最適化問題をできる限り正確に解く必要があることがわかった。