

# 1次元最適施設配置問題 — 施設利用に関する問題点 —

青 木 優

- I. はじめに
- II. 計算式の導出
- III. 結果と考察
- IV. まとめ

## I. はじめに

施設を配置する場合に利用者や配置する側の費用が最小になるようにするには、どこに施設を配置したらよいかという類の問題は最適施設配置問題[1, 2]といわれる。本研究では、最も単純な最適施設配置問題として、施設の需要分布を解析的な関数で与えて利用者総費用のみを最小にする問題を扱う。このような問題の場合、需要分布としては、Tanner-Sherratt モデル(正規分布モデル)[1, 3]がしばしば用いられる。これは図1のように一般的な需要分布が複数の正規分布の重ね合わせで近似できるためである。

従来の研究[1, 3]では、このような最適施設配置問題の解は最急降下法を用いて数値的に局所的最適解までしか求められていなかったが、筆者は論文[4]において、需要分布を Tanner-Sherratt モデルとした場合の最適施設配置問題をシミュレーティッド・アニーリング法[5]で解き、施設数が1から30までの最適解を求めた。さらに、最適配置とアルゴン原子クラスターの安定構造との類似性について解析をおこなった。アルゴンのクラスターでは、原子数が少ない場合は正20面体クラスターが最も安定な構造であり、この構造をとる原子数(マジックナンバー)は、13, 55, 147, 309, 561, ... である。13個の原子の場合には、真中に一つの原子が入りその周りを等価な12個の原子が取り囲む殻構造になっており、55個の場合は、13個のクラスターの周りに更に一層増やした殻構造になっている。解析の結果、Tanner-Sherratt モデルにおける最適施設配置問題の場合、施設数が30以下のときには、6と26が効率よく配置できる施設数であることがわかった。アルゴン原子クラスターとこのモデルにおける施設の配置の間に類似性がみられることから、筆者はこの施設数を施設のマジックナンバーと名付けた。

論文[6]では、需要分布を Newling モデル[1]とした場合の最適施設配置問題を、論文[4]と同様の方法で解いた。その結果、施設数が30以下のときには、15が施設のマジックナンバーであることがわかった。

論文[7]では、Tanner-Sherratt モデルにおける最適施設配置問題を施設数が64まで解き、解を分類した。施設の最適配置には殻構造が見られ、少なくとも施設数が57までは規則性のある殻構造があることがわかった。また、殻が一層増える幾何学的プロセスは、中心付近の施設クラスターが6個の5角形状クラスターから出発し、7個の6角形状クラスター、8個の7角形状クラスター、2個のクラスター、3個のクラスター、4個のクラスター、5個のクラスターと変化し、次の状態で殻が一層増えて6個の5角形状クラスターとなることがわかった。

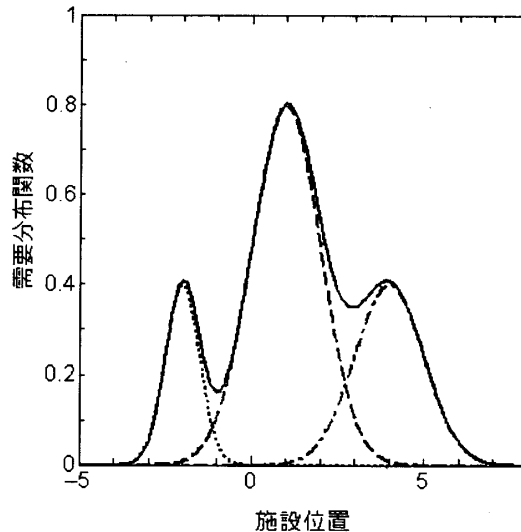


図1：需要分布関数の例

(需要分布関数：実線、正規分布1：点線、正規分布2：破線、正規分布3：1点差線)

このように、今までの研究では最適解を求め、それを分類してきたが、それからわかる施設利用に関する問題点について議論してこなかった。そこで本研究では、本質的な問題点がより明確にわかるように2次元から次元を落とした1次元最適施設配置問題を解き、施設利用の問題点について議論する。また、より精度の高い方法で最適解を求める為の計算式の導出とソフトウェアの開発を行なう。

本論文では、II章で Tanner-Sherratt モデルを用いた1次元最適施設配置問題を解くための計算式を求める。III章では、最初に計算式とソフトウェアが正しいことを検証し、その後で得られた最適解について考察する。最後に、IV章でまとめる。

## II. 計算式の導出

最初に、利用者の費用を最小にする1次元最適施設配置問題を、次のように定式化する。

$N$ 個の施設を  $P_1(x_1), P_2(x_2), \dots, P_N(x_N)$  と表す。位置  $x$  に居る利用者が施設  $P_i(x_i)$  を利用するための費用は、利用者と施設の距離  $|x - x_i|$  だけによるものとする。利用者は必ず費用の最も小さい施設を利用するとすれば各施設の勢力圏は、各施設  $P_i(x_i)$  を母点とする Voronoi 領域  $V_i$  [8]となる。このように、施設までの道程(利用費用)は、すべて直線であるとする仮定の妥当性は、理論的には Davidson[9]により、また、実際のデータによる検証は腰塚と小林[10]によってすでに研究されており、施設までの道路距離を地図上の直線距離で表す仮定は比較的良い近似であり、それを用いた Voronoi 図による結果も信頼できることがわかっている。

このような仮定を用いた場合、各施設利用費用の合計である利用者総費用  $E$  は次のように表される。

$$E[x_1, \dots, x_N] = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} |x - x_i| \rho(x) dx \quad (3-1)$$

施設数  $N$  と需要分布関数  $\rho(x)$  が与えられれば利用者総費用を最小化する問題は式(3-1)の目的関数  $E$  を最小にする施設の位置  $x_1, \dots, x_N$  を求める  $N$ 次元非線形最適化問題として定式化される。

本研究では、需要分布関数  $\rho(x)$  を Tanner-Sherratt モデル (正規分布モデル) :

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3-2)$$

とする。ただし、 $\sigma$  は標準偏差である。

次に、具体的な計算式を求める為、式(3-1)を次のように展開する。

$$\begin{aligned} E[x_1, \dots, x_N] &= \sum_{i=1}^N \int_{V_i} |x - x_i| \rho(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x_1+x_2}{2}} |x - x_1| \rho(x) dx + \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{\frac{x_2+x_3}{2}} |x - x_2| \rho(x) dx + \dots \\ &\quad + \int_{\frac{x_1+x_{i+1}}{2}}^{\frac{x_i+x_{i+1}}{2}} |x - x_i| \rho(x) dx + \dots + \int_{\frac{x_{N-1}+x_N}{2}}^{\infty} |x - x_N| \rho(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} (x_1 - x) \rho(x) dx + \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} (x - x_1) \rho(x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} (x_2 - x) \rho(x) dx + \int_{x_2}^{\frac{x_2+x_3}{2}} (x - x_2) \rho(x) dx \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \int_{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}}^{x_i} (x_i - x) \rho(x) dx + \int_{x_i}^{\frac{x_i+x_{i+1}}{2}} (x - x_i) \rho(x) dx \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \int_{\frac{x_{N-2}+x_{N-1}}{2}}^{x_{N-1}} (x_{N-1} - x) \rho(x) dx + \int_{x_{N-1}}^{\frac{x_{N-1}+x_N}{2}} (x - x_{N-1}) \rho(x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{x_{N-1}+x_N}{2}}^{x_N} (x_N - x) \rho(x) dx + \int_{x_N}^{\infty} (x - x_N) \rho(x) dx \end{aligned} \quad (3-3)$$

この最適化問題を解くためには、

$$\frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_i} = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (3-4)$$

を同時に満たす  $x_1, \dots, x_N$  を求めることになる。

ここで、ライプニッツの公式：

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\phi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha) dx = f(\psi(\alpha), \alpha) \psi'(\alpha) - f(\phi(\alpha), \alpha) \phi'(\alpha) + \int_{\phi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} f(x, \alpha) dx \quad (3-5)$$

を使うと、式(3-3)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_1} &= I[-\infty, x_1] - I\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right] = 0 \\ \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_2} &= I\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right] - I\left[x_2, \frac{x_2+x_3}{2}\right] = 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_i} &= I\left[\frac{x_{i-1}+x_i}{2}, x_i\right] - I\left[x_i, \frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right] = 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_{N-1}} &= I\left[\frac{x_{N-2} + x_{N-1}}{2}, x_{N-1}\right] - I\left[x_{N-1}, \frac{x_{N-1} + x_N}{2}\right] = 0 \\ \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_N} &= I\left[\frac{x_{N-1} + x_N}{2}, x_N\right] - I[x_N, \infty] = 0 \end{aligned} \quad (3-6)$$

ただし、 $I[a, b]$  を次のように定義する。

$$I[a, b] \equiv \int_a^b \rho(x) dx \quad (3-7)$$

また、

$$I[a, b] = I[-\infty, b] - I[-\infty, a] \quad (3-8)$$

を使うと、式(3-6)は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_1} &= 2I[-\infty, x_1] - I\left[-\infty, \frac{x_1 + x_2}{2}\right] = 0 \\ \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_2} &= 2I[-\infty, x_2] - I\left[-\infty, \frac{x_1 + x_2}{2}\right] - I\left[-\infty, \frac{x_2 + x_3}{2}\right] = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_i} &= 2I[-\infty, x_i] - I\left[-\infty, \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right] - I\left[-\infty, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right] = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_{N-1}} &= 2I[-\infty, x_{N-1}] - I\left[-\infty, \frac{x_{N-2} + x_{N-1}}{2}\right] - I\left[-\infty, \frac{x_{N-1} + x_N}{2}\right] = 0 \\ \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_N} &= 2I[-\infty, x_N] - I\left[-\infty, \frac{x_{N-1} + x_N}{2}\right] - I[-\infty, \infty] = 0 \end{aligned} \quad (3-9)$$

ただし、

$$I[-\infty, a] = \begin{cases} I[a, \infty] & a \leq 0 \\ 1 - I[a, \infty] & a \geq 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

$$I[a, \infty] \equiv \int_a^\infty \rho(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad a \geq 0 \quad (3-11)$$

$$I[0, \infty] = \frac{1}{2}, \quad I[-\infty, \infty] = 1 \quad (3-12)$$

である。

式(3-9)は、需要分布関数が特殊な場合を除いて、解析的に解くことができないので、本研究では最急降下法を用いて解く。シミュレーティッド・アニーリング法でなく最急降下法を用いる理由は、今回のような1次元問題であれば、初期値を上手く選べば、シミュレーティッド・アニーリング法よりも高速に最適解を見つけることができるからである。

同様に、式(3-3)は次のように変形できる。

$$E[x_1, \dots, x_N] \equiv \sum_{i=1}^N E_i, \quad E_i = \int_{V_i} |x - x_i| \rho(x) dx \quad (3-13)$$

ここで、 $E_1, \dots, E_N$  は、次のように表される。

$$\begin{aligned} E_1 &= x_1 \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_1} - \left\{ J[-\infty, x_1] - J\left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right] \right\} \\ E_2 &= x_2 \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_2} - \left\{ J\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right] - J\left[x_2, \frac{x_2 + x_3}{2}\right] \right\} \\ &\dots\dots\dots \\ E_i &= x_i \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_i} - \left\{ J\left[\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, x_i\right] - J\left[x_i, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right] \right\} \\ &\dots\dots\dots \\ E_{N-1} &= x_{N-1} \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_{N-1}} - \left\{ J\left[\frac{x_{N-2} + x_{N-1}}{2}, x_{N-1}\right] - J\left[x_{N-1}, \frac{x_{N-1} + x_N}{2}\right] \right\} \\ E_N &= x_N \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_N} - \left\{ J\left[\frac{x_{N-1} + x_N}{2}, x_N\right] - J[x_N, \infty] \right\} \end{aligned} \quad (3-14)$$

ただし、 $J[a, b]$  を次のように定義する。

$$J[a, b] \equiv \int_a^b x \rho(x) dx = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \right] \quad (3-15)$$

### III. 結果と考察

本研究では、標準偏差1.0の Tanner-Sherratt モデルにおける最適配置を、施設数  $N$  が200以下の場合について最急降下法で求めた。最急降下法の  $x_1, \dots, x_N$  の初期値は、

$$\begin{aligned} x_0 &= \sigma \left( -\frac{3}{2} - \log_{10} N \right) / (N+1), \\ x_i &= x_{i-1} + n \cdot \Delta x, \quad \Delta x = 2\sigma \left( \frac{3}{2} + \log_{10} N \right) / (N+1) \end{aligned}$$

とし、最急降下法における  $E_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) の収束は  $10^{-16}$  とした。

最初に式(3-9)、及びソフトウェアの検証を  $N=2$  の場合についておこなう。 $N=2$  の場合には、式(3-6)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_1} &= I[-\infty, x_1] - I\left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right] = 0 \\ \frac{\partial E[x_1, \dots, x_N]}{\partial x_2} &= I\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right] - I[x_2, \infty] = 0 \end{aligned} \quad (3-16)$$

更に需要分布関数が  $x=0$  に関して対称であること、 $I[-\infty, \infty]=1$  を考慮すると、式(3-16)は次のようになる。

$$I[-\infty, x_1] = I\left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

$$I\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right] = I[x_2, \infty] = \frac{1}{4} \quad (3-17)$$

これを満たす  $x_1, x_2$  を求めると、

$$x_1 = -0.67450, \quad I[-\infty, x_1] = 0.249997$$

$$x_2 = +0.67450, \quad I[-\infty, x_2] = 0.249997 \quad (3-18)$$

となる。また、式(3-9)を使って開発したソフトウェアによって求められた  $x_1, x_2$  は、

$$x_1 = -0.67449$$

$$x_2 = +0.67449 \quad (3-19)$$

である。式(3-18)と式(3-19)を比較すると、式(3-9)とそのソフトウェアが正しいことが検証できる。

次に、実際に求められた最適配置の様子を示すため、 $N=20$ の最適配置を図2に示す。需要分布が原点集中型であることから、施設配置も同型となっている。また、最も外側の施設の勢力圏が  $x_1 \rightarrow -\infty, x_{20} \rightarrow \infty$  に及ぶことから、外側の数施設が外側に広がっている。

外側の施設の広がり詳細を調べるため、原点から近い順に施設に番号を付け、その番号と原点からの距離をグラフにした。 $N=20$ と $N=200$ の場合のグラフを図3に示す。プロットされている施設の数、それぞれ半数になっているのは、施設の位置が  $x=0$  に関して対称であるためである。

$N=20$ の場合、8番目までは直線的、つまり等間隔に近い状態になっているが、9、10番目は8番目以下よりも施設間隔が広がっている。 $N=200$ の場合も同様のことが言える。つまり、80番目位までは直線的で、それ以降は施設間隔が広がっている。この結果が各施設の一人当たりの平均利用費用とどのように関係しているのかを調べるために、式(3-20)で表される各施設の平均利用費用  $D_i$  を求め、施設番号を横軸にして図4にグラフを描画した。

$$D_i = \frac{E_i}{\int_{x_i} |x - x_i| \rho(x) dx} \quad (3-20)$$

$N=20$ の場合、平均利用費用の変化は、原点から遠ざかるにつれて9番目まで緩やかに増加し、最も外側の施設である10番目で急激に増加している。 $N=200$ の場合にも、98、または99番目までは原点から遠ざかるにつれて緩やかに増加し、それ以降は急激に増加している。このことから両者とも最も外側の平均利用費用が極端に大きくなっていることがわかる。これは、各施設の利用費用  $E_1, \dots, E_N$  の合計が最小になるように施設位置  $x_1, \dots, x_N$  が決定されている為で、最も外側の施設利用費用  $E_1, E_N$  が犠牲になっていることが理由である。つまり、全体の平均利用費用は最小になるように施設位置が決定されているが、各施設の平均利用費用のばらつきに関しては考慮されておらず、最も外側の施設を利用する人に大きな負担を強いていることになる。例えば公共施設の場合には、このような平均利用費用のばらつきを緩和することも重要である。そのためには、式(3-1)の利用費用  $|x - x_i|$  の関数形を新たに考案する必要がある。

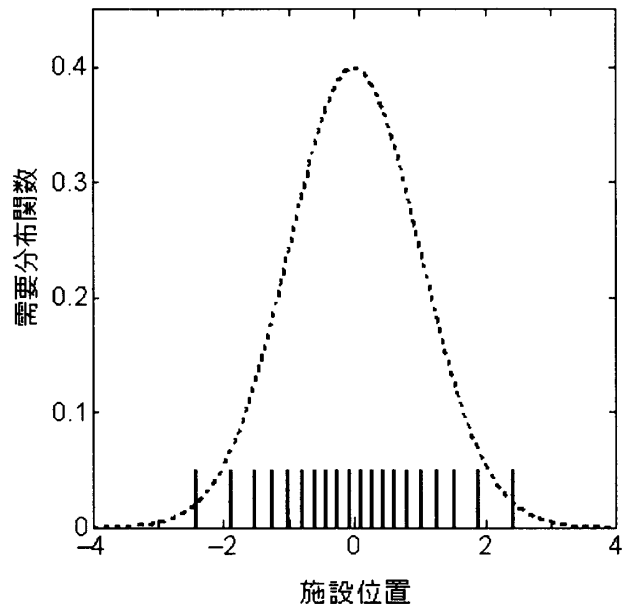


図 2 :  $N = 20$  の最適配置 (実線) と需要分布 (破線)

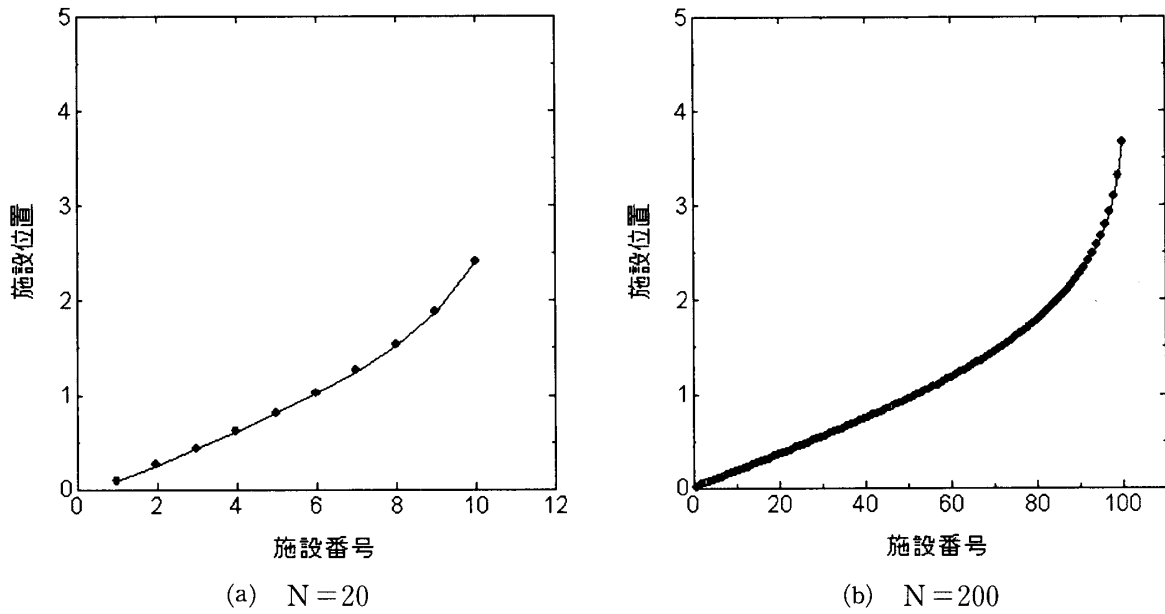


図 3 :  $N = 20, 200$  の場合の施設位置

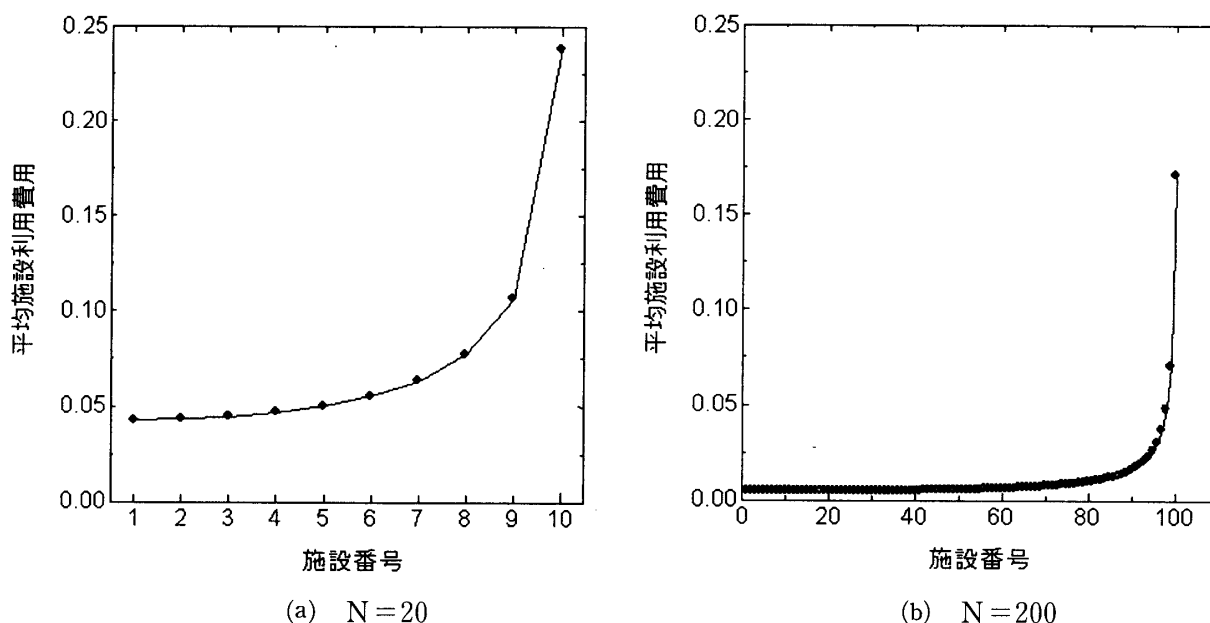


図4：N=20,200の場合の各施設の平均利用費用

#### IV. まとめ

1次元 Tanner-Sherratt モデルにおける利用者総費用を最小にする1次元最適施設配置問題の計算式を求め、最急降下法によって最適解を求めるソフトウェアを開発し、施設数が200まで最適解を求めた。

施設数が2の場合には解析的に解が求められることから、それとの比較で計算式とソフトウェアが正しいことを検証した。また、施設数が20と200の場合の結果から、最も外側に近い、つまり需要分布の広がった地域における施設間の間隔が非常に広いことがわかった。さらに最も外側の施設の一人当たりの平均利用費用が極端に大きくなることもわかった。これは、全体の平均利用費用だけが最小になるように施設位置が決定されているためであり、最も外側の施設利用者に大きな負担を強いていることがわかった。公共施設のように平均利用費用のばらつきを緩和する必要がある場合には、利用費用の関数形を新たに考案する必要がある。

#### 参考文献

- [1]伊理正夫 『計算幾何学と地理情報処理』 共立出版 1997年
- [2]岡部篤行, 鈴木敦夫 『最適配置の数理』 朝倉書店 1992年
- [3]M. Iri, K. Murota, and T. Ohya, "A First Voronoi-Diagram Algorithm with Applications to Geographical Optimization Problems", in *Proceedings of the 11th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Copenhagen Lecture Notes in Control and Information Science 59, System Modelling and Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, pp.273~288.
- [4]青木優 「Tanner-Sherratt モデルにおける最適施設配置問題」『青山経済論集』第52巻第2号 2000年 pp.5~21
- [5]上田顕 『コンピュータシミュレーション —マクロな系の中の原子運動—』 朝倉書店 1992年
- [6]青木優 「Newling モデルにおける最適施設配置問題」静岡産業大学経営学部論集『環境と経営』第7巻第2号 2001年 pp.31~41
- [7]青木優 「Tanner-Sherratt モデルにおける最適施設配置問題—最適配置の分類—」 静岡産業



大学経営学部論集『環境と経営』 第8巻第2号(2002年) pp.81-88

- [8] G. Voronoi, "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques" *J. Reine Angew. Math.* vol.134, 1908, pp.198~287.
- [9] R. Davidson, "Line-Processes, Road and Fibers" *Stochastic Geometry*, E.F. Harding and D. G. Kendall, eds., Jhon Wiley, London, 1974, pp248~251.
- [10] 腰塚武志, 小林純一 「道路距離と直線距離」『日本都市計画学会学術研究発表会論文集』 1983年 pp.43~48