

## 量子力学における代数構造

Algebras in Quantum Mechanics

小林 健一郎

Ken-ichiro KOBAYASHI

(平成22年10月6日受理)

## 要旨

量子論的な調和振動子には、昇降演算子による代数構造が知られている。その構造は、ポテンシャルの形からくるものである。本小論では、調和振動子の理論の拡張として、どのようなポテンシャルが、どのような代数構造を導くかを考察する。その結果、簡単な代数構造を伴うポテンシャルの場合の基底状態を導くことができた。

## 1. はじめに

調和振動子の量子論は、簡単な代数構造を導く。それは、量子力学の「教育的な基本」であるばかりでなく、実際の物理において極めて重要である。たとえば、場の理論に拡張することで、摂動効果を考慮する前の素粒子の基本的な振る舞い、すなわち、自由粒子状態を調和振動子が与えていると考えることができる。

調和振動子の代数は、降演算子  $a$  と昇演算子  $a^\dagger$  のペアと、それらの交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (1-1)$$

から成る。また、適当に規格化したハミルトニアン（エネルギー）は

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad (1-2)$$

と書かれ、調和振動子の各状態は、

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2^n n!}} (a^\dagger)^n \phi_0 \quad (1-3)$$

となる。ただし、ここで  $\phi_0$  は、基底状態を表し、

$$a\phi_0 = 0 \quad (1-4)$$

を満たすものとする。

上記により、調和振動子の励起のレベルは、整数  $n$  で示されることになる。また、これを時空の各点で考えたものが、場の理論への拡張である。

調和振動子のエネルギーは、運動量  $p$  と座標  $x$  で書けば

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (1-5)$$

である。ここで、 $p, x$  は、交換関係

$$[p, x] = -i\hbar \quad (1-6)$$

を満たす演算子である。また、 $m$  は質量、 $\omega$  は調和振動子の角振動数、 $\hbar$  はプランク定数で、 $i$  は虚数単位である。ここで、さらに、

$$P = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p, \quad Q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \quad (1-7)$$

とし、演算子  $a, a^\dagger$  を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(iP + Q), \quad a^\dagger = (-iP + Q) \quad (1-8)$$

と定義して  $H$  を書き直すと、

$$H = \hbar\omega H'$$

となるのである。

もちろん、 $a$  と  $a^\dagger$  は交換関係 (1-1) を満たし、 $H$  の固有状態は、(1-3) のように書くことができるのである。

このように簡単に物理的な意味が明確な代数が現れるのは、調和振動子のポテンシャルエネルギー（以下、ポテンシャルと略記）が、 $x^2$  に比例するためである。

また、ポテンシャルが厳密に  $x^2$  に比例しない場合でも、 $x^2$  に比例する項があれば、調和振動子を基本と考え、それ以上のベキの項を摂動と考えることができる。

しかし、物理現象の中には、 $x^2$  以上の項の摂動を考えられないこともある。その場合、一般には、シュレディンガー方程式を直接解いて解析することになる。しかし、特別な場合には、調和振動子のときのような代数構造が予想される。そのような場合、その物理は、微分方程式論ではなく、代数の表現論で解かれることになるわけである。

本小論では、どのような場合に、どのような代数構造が現れるかを考察する。

## 2. 調和振動子の量子論の拡張

昇降演算子を  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  より導かれる

$$P = -i \frac{\partial}{\partial Q} \quad (2-1)$$

を使って書き直すと、

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial Q} + Q \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\partial}{\partial Q} + Q \right) \quad (2-2)$$

となる。

この節では、この拡張を考えるのである。まず、物理的なハミルトニアンは、

$$H' = \frac{1}{2} P^2 + U(Q) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Q^2} + U(Q) \quad (2-3)$$

という形でなければならない。ここで、 $\frac{1}{2} P^2$  は運動エネルギー、 $U(Q)$  はポテンシャルエネルギーである。ここでは、簡単のため、質量を1に規格化したとし、 $p, x$  の代わりに  $P, Q$  を使った。

次に、拡張した昇降演算子を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial Q} + f(Q) \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\partial}{\partial Q} + f(Q) \right) \quad (2-4)$$

のように仮定する。調和振動子は、 $f(Q)$  が  $Q$  の場合である。

また、ハミルトニアンは、調和振動子の場合と同じく、昇降演算子を使って、

$$H' = a^\dagger a + C \quad (1-4)$$

と書けると仮定する。ここで、 $C$  は、不定な定数であるが、以下では簡単のため、0 とする。

(2-5)、調和振動子の拡張としては自然な仮定であると思われる。もちろん、より一般的な拡張も考えられるが、本小論では扱わない。

すると、(2-3) と (2-5) を比べて、

$$U = \frac{1}{2} \left( f^2 - \frac{\partial f}{\partial Q} \right) \quad (2-6)$$

という式が得られる。

(2-6) が成り立つような  $U$  では、ハミルトニアンが (2-5) という形になるのである。

また、拡張された昇降演算子の代数は、容易に

$$\begin{aligned}
 [a, a^\dagger] &= \frac{\partial f}{\partial Q} \\
 \left[ a, \frac{\partial f}{\partial Q} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} \\
 \left[ a^\dagger, \frac{\partial f}{\partial Q} \right] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{2-7}$$

であることが確かめられる。これは、一般には無限次元代数である。

### 3. 特別な場合

(2-7) は、(2-4) から得られる一般的な代数構造である。この節では、その特別な場合を考察する。

無限次元代数 (2-7) は、特別な場合、有限次元になる。それは、 $f(Q)$  が  $Q$  の多項式の場合である。

たとえば、

$$f = Q \tag{3-1}$$

とおけば、 $\frac{\partial f}{\partial Q} = 1$  であり、1 の微分は 0 になるので、これは調和振動子の場合に戻る。

調和振動子は最も簡単な場合だが、次に簡単なのは、

$$f = \frac{1}{2} Q^2 \tag{3-2}$$

の場合である。このとき、代数は

$$\begin{aligned}
 [a, a^\dagger] &= b \\
 [a, b] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 [a^\dagger, b] &= -\frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}
 \tag{3-3}$$

となる。ただし、上記では、 $\frac{\partial f}{\partial Q} = Q$  を  $b$  と置いた。

この場合、 $U$  は、

$$U = \frac{1}{8} Q^4 - \frac{1}{2} Q \tag{3-4}$$

となる。

このようなポテンシャルに対して、簡単な代数構造が伴うことは、驚きではないだろうか。

$f$  により高次の多項式を使った場合も同様に考えることができる。たとえば、

$$f = \frac{1}{3}Q^3 \quad (3-5)$$

とすれば、その代数は

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= b \\ [a, b] &= \sqrt{2}c \\ [a^\dagger, b] &= -\sqrt{2}c \\ [a, c] &= 1 \\ [a^\dagger, c] &= -1 \\ [b, c] &= 0 \end{aligned} \quad (3-6)$$

となる。ただし、ここでは、 $\frac{\partial f}{\partial Q} = Q^2$  を  $b$ 、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = \sqrt{2}Q$  を  $\sqrt{2}c$ 、と置いた。

この場合、 $U$  は、

$$U = \frac{1}{18}Q^6 - \frac{1}{2}Q^2 \quad (3-7)$$

となる。

#### 4. 基底状態

前節 (2-5) の形のハミルトニアン基底状態はすぐに求めることができる。それは、(1-4) を解けばよいのである。

調和振動子  $f = Q$  の場合、よく知られているように、基底状態の満たす方程式は、

$$\left( \frac{\partial}{\partial Q} + Q \right) \phi_0 = 0 \quad (4-1)$$

となり、その解は、

$$\phi_0 = e^{-\frac{1}{2}Q^2} \quad (4-2)$$

のように与えられる。ただし、ここでは、特に興味のない波動関数の規格定数は省略した。以下同様である。これに昇演算子を作用させたものが (1-3) である。

前節で見た  $f = \frac{1}{2}Q^2$  の場合、基底状態の満たす方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{1}{2}Q^2\right)\phi_0 = 0 \quad (4-3)$$

となる。

この解は、

$$\phi_0 = e^{-\frac{1}{6}Q^3} \quad (4-4)$$

である。残念ながらこの解は  $Q \rightarrow -\infty$  で発散してしまう。

$f = \frac{1}{3}Q^3$  の場合の基底状態も、

$$\phi_0 = e^{-\frac{1}{12}Q^4} \quad (4-5)$$

となることがわかる。この解は発散せず、したがって十分物理的な解であると考えられる。

## 5. 考察

本小論では、調和振動子の代数の拡張を考え、そのような代数に付随するポテンシャルを考察した。導かれるポテンシャルエネルギーにはタキオンなどなく、十分に物理的な意味があり得ると考えられる。また、これらのポテンシャルに対して基底状態が簡単に導かれることを示した。

今後は、この代数の表現論を考えていきたい。基底状態以上の状態は、この表現論より導かれるはずである。

## 謝辞

静岡産業大学情報学部の方々に感謝致します。

## 文献

- [1] ランダウ＝リフシッツ『量子力学』東京図書
- [2] D. ter Haar 宮沢弘成訳『演習量子力学』丸善株式会社
- [3] 堀田良之『代数入門』裳華房
- [4] 弥永昌吉『代数学』岩波書店